TOWARDS SIMPLICITY IN TEACHING

AGRADECIMIENTOS

Buenas tardes. Permítanme que lea mi intervención, pues no quisiera olvidar nada.

Me siento muy feliz de estar aquí, me gusta mucho Portugal y el motivo que nos ha reunido es un tema al que he dedicado mucho tiempo e interés a lo largo de mi vida y venir aquí a hablar sobre ello me produce gran satisfacción.

Quiero agradecer a la Universidad de Oporto, a su Facultad de Bellas Artes y especialmente al Profesor Vasco Cardoso su amable invitación para participar en este interesante encuentro de Facultades pertenecientes al plan Erasmus. Creo que un encuentro de este tipo va a ser muy provechoso para todos los asistentes –yo incluido- y en lo que trascienda también lo será para mucha más gente interesada en estos temas. Espero que se celebren muchos más encuentros de este tipo en el futuro.

He dividido mi conferencia en varios apartados y en deferencia a los asistentes angloparlantes traduciré al inglés los títulos de los mismos.

INTRODUCCIÓN/ INTRODUCTION

Para empezar debo decir que el título de esta charla lo acordamos el Profesor Vasco Cardoso y yo. Sin embargo, ahora pienso si no hubiera sido mejor titularla *Towards Simplicity in learning*. Lo digo porque nuestro deber como profesores es ponernos en el papel del alumno. Bueno, ustedes juzgarán cuál sería el mejor título cuando hayan escuhado todo lo que voy a decir.

Mi intención en esta charla es proponer algunos caminos que faciliten la enseñanza de la Geometría y de la Geometría Descriptiva y estimulen al estudiante, ya que todos sabemos que este aprendizaje es una tarea más bien ardua para él o ella.

Yo no voy a explicar aquí Geometría ni Geometría Descriptiva ni ninguna de sus partes. Lo que voy a decir aquí no es un programa o temario de una asignatura, se trata sólo de algunas sugerencias para facilitar y estimular su aprendizaje. Habrá algunas que, siendo quizá poco académicas –*sensu stricto*- resultan ser, sin embargo de lo más didácticas.

Muchas de las cosas que aquí expongo fueron ya escritas por mí y publicadas en los libros que figuran en la bibliografía al final.

****

Las cosas son difíciles o fáciles (complicadas o sencillas) según nos las tomemos. Esto pasa también con las distintas materias en la enseñanza. Lo que sucede es que el alumno –salvo casos excepcionales- suele tomarse la asignatura como se la toma el profesor. Si el profesor se la toma como si fuera difícil o complicada, lo será sin duda para el alumno. Por lo tanto, creo que es obligación del profesor tomarse la asignatura como algo fácil –en el buen sentido de la palabra- digamos mejor sencillo. Así pondrá las cosas fáciles al alumno, en el buen sentido de la palabra. Claro, que para poder hacer eso el profesor tiene que dominar la materia a fondo.

Hablo por mi experiencia como profesor, pero también por mi experiencia previa como alumno. Cuando yo estudiaba Geometría Descriptiva en la Escuela de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid el profesor no lo ponía fácil y yo, sencillamente, no me enteraba, así es que suspendí en la convocatoria de junio. Recurrí a un tío mío que regentaba una academia privada de preparación para Aparejadores en la que él mismo impartía las clases de Geometría Descriptiva. A la tercera clase que me dio yo ya conocía las claves de la Geometría Descriptiva. Desde luego mi tío era un excelente profesor que me hizo fácil el aprendizaje porque me transmitió que la Geometría Descriptiva era una materia sencilla. Cogí mucha afición a dicha materia y la estudié a fondo. Me examiné en septiembre y tuve que resolver la sombra de una esfera en sistema diédrico. Lo resolví estupendamente, pero cuando salieron las notas yo figuraba como aprobado. Fui a reclamar al profesor, quien me dijo que mi examen estaba muy bien, pero que él en la convocatoria de septiembre, calificaba simplemente con aprobado o suspenso. Hube de conformarme, pero al terminar la carrera fui a hablar con ese mismo profesor, que era el catedrático de Geometría Descriptiva, y le pedí que me contratase como profesor en su cátedra, cosa que hizo. Desde entonces (1968) hasta mi jubilación en 2014 me he dedicado con gran entusiasmo a la enseñanza de esta materia, decantándome como investigador por la perspectiva y enseñando también Diseño Escenográfico.

Muy pronto llegué a la conclusión de que enseñar es “ayudar a aprender”. Por eso el alumno tiene que querer aprender, porque si no quiere prender –por las razones que sean- no hay nada que hacer. Pero mi experiencia me dice que la mayoría sí quieren cuando descubren que la Geometría Descriptiva no es tan difícil.

Para estudiar Artes Plásticas o Diseño es fundamental saber Geometría y luego Geometría Descriptiva. Estas materias a veces se estudian con el nombre de Dibujo Técnico, al menos en España.

El profesor nunca debería suponer que el alumno tiene claro lo que son los elementos básicos de la geometría (el punto, la recta y el plano), así como sus relaciones fundamentales. Porque unos y otras son la base de la Geometría y si no se conocen suficientemente esos conceptos es muy difícil que se pueda entender nada de lo que la Geometría plantea. Claro, que la formación con la que llega el alumno para estudiar Geometría y Perspectiva en la enseñanza artística no es posiblemente la misma en los diferentes países. Yo puedo hablar de los planes de estudio en España –aunque no sea éste el momento de hacerlo- y espero en estos días saber por los colegas de otros países lo que en ellos se estudia a este respecto. He entrado en la página web de la FBAUP y he visto que en las dos especialidades (Artes Plásticas y Diseño de Comunicación) sólo hay una asignatura de Geometría en el 2º curso con la misma programación para ambos. En esos programas se aborda directamente tanto la aplicación de la Geometría a la especialidad como la Geometría Descriptiva, por lo que deduzco que los alumnos vienen ya preparados en Geometría desde el Bachillerato. Al ser un programa común para las dos especialidades me imagino que luego los respectivos profesores llevarán los temas al campo de su competencia.

Como no puede ser de otra manera yo voy a abordar aquí algunos de los temas que figuran en la programación que se imparte en este centro. Pero tratando de encontrar la manera de hacerlos de fácil comprensión.

Creo que lo primero que debemos hacer ver al alumno es que su relación con la geometría –lo sepa o no, lo quiera o no- es íntima y apabullante. Es íntima porque por así decirlo la llevamos puesta, ya que está íntimamente relacionada con los dos más importantes de los cinco sentidos que poseemos: la vista y el oído. La vista porque nuestros ojos son cámaras oscuras (1) en las que se produce el fenómeno de la proyección de los rayos de luz que reflejan los objetos sobre la superficie de la retina (ya sabemos que el cerebro se ocupa de enderezar la imagen) y el oído porque el descubrimiento de los canales semicirculares en el sentido vestibular, situado en el oído, nos hace ver cómo nuestra orientación espacial, regulada por ese sentido, está ligada a las tres direcciones principales del espacio: la vertical y dos horizontales perpendiculares entre sí. En efecto (2), los canales semicirculares están orientados en tres planos perpendiculares entre sí, como el triedro trirrectángulo sobre el que Descartes planteó sus coordenadas.

A continuación hay que hacer ver al alumno cómo las medidas de su cuerpo responden a unas reglas geométricas de proporción que han dado como referencia el cánon que ha variado a lo largo de la Historia: desde el cánon griego de Policleto (3a-b) y el renacentista de Leonardo (4), tiempo en que el hombre ideal era tanto Adonis como Jesucristo, por lo que una de las posiciones del hombre vitruviano de Leonardo coincide con la de un crucificado. y sobre ella se han basado los cristos de Velázquez y de Goya[1] (5a-b-c).

También es importante que el alumno sea consciente de que las medidas de su cuerpo y el alcance de sus movimientos han dado lugar a reglas de medición de los objetos y los espacios. En este sentido pondré un solo y sencillo ejemplo: la escalera. (6a-b). Desde 1675 se ha venido empleando la fórmula de François Blondel: 2 contrahuellas + 1 huella = 61-65 cm. Ejemplo: 2 x 17 + 29 = 63 cm.

Entrando ya en los conceptos básicos de la Geometría sabemos que el punto está al principio de todo. Y ese es el primer gran problema, ya que en el terreno del arte lo que cuenta es lo que el artista deja señalado sobre el soporte (papel, lienzo, etc.). Y el alumno que quiere estudiar arte tiene esto claro. Por lo tanto el punto geométrico representa un escollo para quien quiere ser artista, ya que su definición no responde a un objeto físico, simplemente marca una posición en el espacio respecto a un sistema de coordenadas previamente determinadas. Además el punto no se puede dejar señalado si no es como la intersección de dos pequeños segmentos de recta, que tienen en común ese punto. Es el llamado punto en cruz o en aspa, pero a su vez los segmentos sólo tienen una dimensión (la de la longitud) y al dibujarlos con lápiz en el papel ya tienen también un grosor. A esto lo llamaré "la paradoja del punto" (7) y es un problema para el estudiante –especialmente para el que quiere ser artista- y sobre todo para aquél que no ha cursado Dibujo Técnico en el bachillerato, aunque ya sabemos que el hecho de haber aprobado esa materia no quiere decir en todos los casos que el estudiante tenga suficientemente claro lo que son los elementos básicos de la Geometría y sus relaciones fundamentales. Así es muy conveniente empezar definiendo con toda claridad y sencillez esos elementos y esas relaciones.

---

[1] Véase "The *Trattato*…" en la bibliografía.

Keith Critchlow, de quien tuve el honor y el placer de ser discípulo en la Architectural Association de Londres, considera lo que él denomina el circumpunto, que es un punto geométrico con un área de influencia que es, naturalmente, un círculo, lo que nos permite, al pasar de la dimensión 0 del punto a la dimensión 1 de la recta y a la 2 del plano considerar incluso las tangencias. (8) Esto podría ser una primera aproximación a los temas fundamentales de la Geometría antes de pasar a un mayor grado de abstracción.

Entre los artistas el escultor tiene otra visión del espacio. El dibujante, el grabador, el pintor trabajan en el plano; el escultor lo hace en el espacio. Pero los primeros llevan al plano visiones espaciales y los segundos hacen bocetos previos y aquí está el papel fundamental de la Geometría Descriptiva. Recordemos a Benvenuto Cellini que en su aportación a la encuesta auspiciada por la Academia Florentina en 1547 sobre la primacía de las artes decía que para él la escultura era la mayor entre todas las artes del dibujo "porque una estatua de escultura debe tener ocho vistas y conviene que todas sean igualmente buenas" (9). Es decir, para que la escultura saliera bien era imprescindible considerar cómo se vería desde ocho puntos de vista diferentes. Y esto había que hacerlo previamente dibujando.

Otras expresiones artísticas como las instalaciones, el videoarte y algunas manifestaciones del arte digital también trabajan en el espacio. Pero nuevamente hay que decir que existen bocetos bidimensionales previos, aunque se realicen en la propia pantalla del ordenador. Quizá sea la fotografía la expresión artística más inmediata en cuanto a la representación del espacio en un plano, pero para entenderla bien requiere su identificación con la perspectiva.

Hay un dato que no debemos olvidar: la Perspectiva ha estado fundamentalmente en manos de los artistas desde su descubrimiento como sistema de representación cuando Brunelleschi, h. 1425, realizó su experimento con el Baptisterio de Florencia (10a-b) hasta prácticamente 1800 en que pasa a formar parte de la ciencia gracias a Gaspard Monge.

El estudiante de Diseño tiene otra mentalidad y quizá por eso le costará menos resolver "la paradoja del punto". Aquí nuevamente hemos de hacer la distinción entre los que trabajan en dos dimensiones y los que lo hacen en tres. Al primer grupo pertenecen los diseñadores gráficos y al segundo los diseñadores de objetos (de todo tipo y tamaño de objetos), los decoradores o diseñadores de interiores, los escenógrafos en el teatro y los directores artísticos en el cine; se podría incluir aquí a los que hacen los videojuegos. Cabe también hablar del Espacio Virtual que es la única expresión artística que permite prescindir de los habituales planos o vistas del objeto, ya que permite diseñar el objeto tridimensional (11a-b-c) y convertirlo directamente en objeto físico mediante un escáner 3D. Además se puede representar y construir todo tipo de personajes humanos o animales. paisajes naturales, paisajes urbanos, arquitecturas, todo tipo de objetos y escenarios.

No se trata aquí de ver las relaciones, las coincidencias y las diferencias entre un artista y un diseñador, pero sí de señalar la enorme importancia que tienen para ambos la Geometría y la Geometría Descriptiva.

LA PERCEPCIÓN DEL ESPACIO/ PERCEPTION OF SPACE

La Geometría y la Geometría Descriptiva son una consecuencia de la percepción del espacio por parte de la Humanidad. Cuando el hombre primitivo se tumbaba a ver las estrellas las veía como puntos y veía las figuras que formaban: sin duda recorría con los ojos la distancia de una estrella a otra en línea recta y si luego se fijaba en una tercera estrella ya veía el triángulo. Así se designaron las constelaciones y los signos del zodiaco que los astrónomos han reconocido en el firmamento, como el denominado Libra (12). Existe un espacio exterior a nosotros (todo lo que nos rodea) y existe también un espacio interior en el que se desarrollan nuestros pensamientos y nuestra imaginación a partir de lo que puebla el espacio exterior: personas, naturaleza, objetos… El diálogo continuo entre el espacio interior y el espacio exterior constituye el concepto global de espacio.

De este diálogo nacieron los conceptos de arriba, abajo, izquierda, derecha, distancia, dimensión, altura, anchura, profundidad, volumen, luz y sombra, textura, escorzo, gama de color, etc. Y también y en relación con el cuerpo humano la denominación de las distintas medidas, prácticamente iguales o parecidas en los distintos países: dedo, palmo, brazo, codo, pie, paso, vara, etc. (13) Hasta desarrollar sistemas de medidas basados en él. (14)

La percepción visual en general es un ejemplo muy claro de este diálogo entre espacio interior y espacio exterior: es un fenómeno que empieza en el espacio exterior (el objeto mirado) y termina en nuestro espacio interior(15) , la retina que, activada por la luz reflejada por el objeto, se traduce en la imagen de lo que vemos.

A lo largo de los siglos esta observación de la naturaleza llevó a construir conceptos abstractos que son la base de la Óptica y de la Geometría. La explicación geométrica de la forma circular del arco iris (16) -concebida seguramente por alguno de los discípulos de Aristóteles - y la geometrización de la Óptica llevada a cabo por Euclides son los primeros intentos serios de matematización de fenómenos naturales que han tenido lugar en la historia del pensamiento.

Los griegos nos legaron tres disciplinas maravillosas: la Óptica, la Geometría y la Filosofía muy relacionadas entre sí, ya que la Óptica se formula en términos geométricos y muchos filósofos eran geómetras. Euclides sistematizó hacia el año 300 a. de C. todo el conocimiento sobre Geometría que pudo recopilar de sus antecesores en su libro *Elementos* que aún sigue siendo válido. Sin embargo hemos de atender también a la Geometría Proyectiva (17) que de alguna manera engloba a la Geometría Euclidiana y es la base de la Geometría Descriptiva, en la que el concepto de proyección es fundamental.

Nos interesa la llamada Geometría Sintética, que atiende a las figuras por sí mismas sin necesidad de fórmulas ni ecuaciones, en contraposición a la Geometría Analítica. Debemos considerar fundamentalmente la Geometría Sintética en la formación de los artistas plásticos y de los diseñadores, sin perjuicio de que se puedan, e incluso en algún caso se deban, complementar con otras geometrías y con algunas ecuaciones.

No olvidemos que el desarrollo de la Óptica dio como fruto la cámara oscura que tendremos que analizar en su momento.

LA MAGIA DE LA GEOMETRÍA/ THE MAGIC OF GEOMETRY

Debemos hacer ver a los alumnos que la Geometría es un mundo apasionante que encierra misterios que debemos descubrir y desentrañar. Primero diferenciamos entre Geometría Plana y Geometría Espacial.

En ambos casos se trata de conocer y analizar figuras, primero en dos y luego en tres dimensiones. La única forma de estudiar las figuras es dibujándolas.

Empezando por lo más fácil, la Geometría Plana, de dos dimensiones, encontramos como primer problema lo que antes denominé “paradoja del punto”. Hemos de comprender que la no dimensión del punto se representa por la intersección de dos segmentos de recta que, a su vez, no deberían tener el grosor de la línea. Si el alumno es capaz de ser consciente de esto cada vez que haga una figura plana tendrá mucho adelantado.

Luego hemos de sentar las definiciones de recta y plano y las relaciones entre ellos y con el punto. Esto nos lleva a plantear el razonamiento deductivo que es fundamental en Geometría (postulados y teoremas).

Hemos de hacer ver a los alumnos la belleza y la magia de la Geometría. La circunferencia y los polígonos regulares están llenos de ambas. Este es un mundo en el que el alumno debe entrar a pasarlo bien, dibujando los polígonos regulares de forma tradicional (18a-b) , comprendiendo el concepto de simetría en el plano (19a-b), deduciendo del cuadrado la sección áurea (20a-b), buscando ésta en el pentágono regular (21a-b) y utilizando ésta para construir la espiral dorada (22). Sin olvidar que también se da en el cuerpo humano y en la naturaleza.

Podemos empezar a intuir el concepto de infinito en el plano: a partir de un cuadrado dado inscribir cuadrados hacia lo más pequeño y circunscribir cuadrados hacia lo más grande (23a-b).

Avanzaremos más en este concepto considerando una circunferencia y haciendo que su radio vaya creciendo hasta hacerse infinito, así la circunferencia devendrá en recta, pero recta en el infinito: es la recta en el infinito del plano que contiene a la circunferencia, recta del infinito que todo plano posee, formada por todos los puntos del infinito adonde van a parar todos los radios de la circunferencia, que señalan todas las direcciones del plano. (24). Los puntos y rectas en el infinito se llaman también impropios. No hace falta una demostración matemática ni recurrir a la Geometría de Inversión, ya que nuestros alumnos pueden entender visual e intuitivamente este proceso.

Otra forma de considerar el infinito en el plano es la teselación (25).

FROM 2D TO 3D

Si presentamos a los alumnos este dibujo (26) y les pedimos que digan qué representan estas figuras les estamos planteando un juego muy didáctico. Dirán que se trata de un cuadrado, una circunferencia, un triángulo equilátero y un hexágono regular y habrán acertado. Pero si preguntamos si podrían representar algo más les estamos proponiendo pasar de las dos a las tres dimensiones mediante la representación (27a,b,c,d). Hablaremos de profundidad y de partes vistas y ocultas, de lo que es una sección (el círculo máximo ecuatorial en la esfera) y de las convenciones del dibujo o convenciones gráficas (líneas vistas y ocultas y su trazado). En el caso del triángulo diremos que precisamente por ser equilátero la única pirámide que no puede representar es el tetraedro regular; para que lo fuese esa cara triangular debería ser paralela al plano del dibujo y entonces no estaría apoyado sobre otra cara como base, tal como el cubo se apoya en una de sus caras. Para entender mejor esto se requeriría una vista lateral. La esfera se apoya en un punto sobre el plano del suelo: ¡he aquí la tangencia! Esfera y plano de apoyo tienen un punto común.

Siguiendo a Critchlow podemos pasar de la dimensión 0 a la 1, luego a la 2 y a la 3 mediante traslación y giro. (28)

La magia y la belleza de la Geometría aumentan cuando pedimos a los alumnos que hagan maquetas de los poliedros regulares a partir de su desarrollo en el plano en las que se puedan ver las interrelaciones entre unos y otros. Escher decía que "los poliedros regulares no son invención de la mente humana, pues existían mucho antes de que la humanidad apareciese en escena" (29). Escher quería decir, creo yo, dos cosas: que los poliedros regulares pertenecen al mundo platónico de las ideas y que por eso mismo existían mucho antes de que naciera Platón. Escher dibujó cuatro de los cinco sólidos platónicos como lo había hecho Leonardo (30a,b,c,d), pero el cubo lo presentó en un grabado (31) en el que aparece como una ilusión más. A partir de este cubo se pueden sacar interesantes conclusiones para el estudiante.

Los circumpuntos en el plano de Critclow son esferopuntos en el espacio. Como ejemplos: tetraedro y octaedro. (32a-b) Los centros de las esferas son los vértices de los poliedros.

Las relaciones entre los poliedros regulares tienen algo de mágico. Así tenemos la dualidad entre poliedros (33a,b) y, por dar dos ejemplos más, el dodecaedro que contiene cinco cubos cuyas aristas son las diagonales de las caras del dodecaedro y la relación entre los cinco sólidos platónicos según Pacioli. (34a,b).

El concepto de infinito en el espacio nos lo dan los poliedros duales a partir de uno dado hacia lo más pequeño y hacia lo más grande (35). Igualmente con la repetición de un módulo *ad infinitum*: ¿qué poliedros son capaces de llenar el espacio? (36a,b). Cubo y Kelvin u octaedro truncado.

Una forma sencilla de pasar de las dos a las tres dimensiones es analizar el desarrollo plano de los poliedros y construirlos a partir de ese desarrollo (37).

Hemos pasado de las dos a las tres dimensiones y en ambos casos hemos visto que podemos inscribir y circunscribir figuras o cuerpos *ad infinitum*. Polígonos y poliedros regulares son muy gratificantes para el alumno e imprescindibles en su formación.

Podemos introducir el concepto de escala en relación con el hombre en el cubo (38a,b,c) – los dados, el cubo de Rubik y varios pufs - en su relación con la figura humana. Liu Ming, experto en Feng Shui, diseñó una unidad móvil cúbica, (39a,b)una vivienda mínima, que contenía todo lo que necesitaba para dormir, estudiar y meditar basada en los principios del ying y el yang, como una manera de equilibrar su vida personal y profesional.

Otras superficies importantes son la esfera, el cono y el cilindro. Es importante, aparte de definirlas, considerar sus secciones planas. Ya vimos el círculo ecuatorial en la esfera, podemos ver ahora los paralelos y meridianos (40a-b), todos ellos círculos máximos. Al igual que los polígonos regulares se inscriben en la circunferencia los poliedros regulares se inscriben en la esfera. Podemos también ver la intersección entre cubo y esfera que da círculos menores y casquetes esféricos que en arquitectura podrían ser cúpulas rebajadas. Cono y cilindro, al igual que pirámide y prisma son una misma superficie radiada, sólo las diferencia la posición del vértice: si es un punto propio o impropio (41). En cuanto a las secciones de cono y cilindro es de gran ayuda un vaso con agua (42a-b). Cuanto más inclinemos el vaso más largo será el eje mayor de la elipse sección

(43a-b). En el cono es importante considerar las dos hojas, lo que facilita la comprensión de la hipérbola como sección plana del mismo (44).

EL OJO, LA CÁMARA OSCURA, EL VELO DE ALBERTI, LA VENTANA DE LEONARDO Y EL PORTILLO DE DURERO/ THE EYE, THE DARK CHAMBER, ALBERTI'S VEIL, LEONARDO'S WINDOW AND DURER'S *MAN DRAWING A LUTE*

Antes de entrar en la sistematización de la representación (la Geometría Descriptiva) conviene analizar el proceso de abstracción que va del ojo a los instrumentos que permiten representar los objetos de forma similar a cómo los ve el ojo. Este proceso natural de abstracción del fenómeno visual y de la representación de los objetos puede servir como experiencia previa a la representación perspectiva y a los procesos de abstracción más agudos de los otros sistemas de representación. En cualquier caso éste sería un tema a debatir, ya que la perspectiva lineal supone un grado de abstracción con respecto a la realidad de la visión que entraña cierta dificultad.

Sabemos que el ojo funciona como una cámara oscura que invierte la imagen que se proyecta en la retina y que luego nuestro cerebro se ocupa de ponerla en su posición correcta (45). Se pueden hacer experimentos con la caja de zapatos como cámara oscura y utilizar la cámara fotográfica para entender el fenómeno de la visión y el de la representación. Yo tuve la suerte de experimentar de niño el fenómeno de la cámara oscura en mi dormitorio, ya que al quedar alguna rendija entre las lamas de la persiana la luz que se filtraba proyectaba en el techo de la habitación lo que había en la calle: los coches circulando y la gente andando. Esto es algo que se puede hacer en cualquier habitación con persiana enrollable.

Máquinas de dibujar hay unas cuantas, pero que deberíamos limitarlas a una sola en dos distintas versiones. El velo de Alberti era una trama de hilos en plano a través de la cual se podía ver el objeto a representar y su cuadrícula servía de referencia para hacer el dibujo sobre un papel cuadriculado. Durero reúne en esta máquina los conceptos albertianos del cuadro como ventana y del velo como ayuda al dibujo con la pared de vidrio de Leonardo (46). En su portillo Durero va más allá en el proceso de abstracción de la perspectiva (47), sustituyendo el ojo por una argolla en la pared y los rayos visuales por el bramante tensado que se sitúa en puntos específicos del laúd. Como decía antes el uso de estos artefactos puede ser muy útil para la comprensión de la perspectiva lineal por parte del estudiante.

EL JUEGO DE LAS REPRESENTACIONES/ THE GAME OF REPRESENTATIONS

Ahora es el momento de entrar a estudiar la representación sistematizada. En 1978 publiqué en la Escuela de Arquitectura, donde yo era entonces profesor de Geometría Descriptiva, un libro con el título: *El juego de las representaciones*. Llevaba por subtítulo: *Aproximación lúdica a los sistemas de representación de la Geometría Descriptiva*. Lo escribí para mis alumnos de entonces, pero releído ocho lustros después veo que sigue teniendo bastante valor didáctico. Lo que sigue es un resumen de algunas de las cosas que allí decía.

Mi experiencia en la enseñanza de la Geometría Descriptiva me ha enseñado que ni siquiera las cosas más elementales deben darse por supuestas cuando se trata de explicar a quienes, como la mayoría de los estudiantes que yo he tenido (sospecho que no serán los únicos), o bien dan por supuesto que no saben nada, pero que inconscientemente creen saber algo, o bien dan por supuesto que saben algo. En ambos caso suele ocurrir que tal supuesto no pasa de ser una ficción, pues eso que creen saber suele estar apoyado sobre bases muy endebles, cuando no falsas, con lo cual es como si no supieran nada o, peor aún, ya que ese conocimiento falso será como un velo oculto que les impedirá ver las cosas tal como son. Así pues mi primera recomendación al estudiante de esta materia es que parta de la base de que realmente no sabe nada, que deje su mente en blanco a este respecto para que pueda seguir la explicación de la manera más inocente posible. Pues si acaso tiene una idea equivocada sobre alguno de los temas que le van a ser explicados, ésta le impedirá entenderlo y permanecerá en su error o en una gran confusión.

Es importante considerar desde el primer momento que las rectas y los planos son infinitos, es decir que no se acaban nunca. Así el hecho de que su representación tenga unos límites de dimensión no quiere decir que rectas y planos se acaben donde acaban en el dibujo; debemos considerar que continúan: las rectas en los dos sentidos y los planos en todas las direcciones.

Un diedro y un triedro se suelen representar así: (48a-b).

Los límites que hemos impuesto al dibujo no deben hacernos olvidar que sería mejor representarlos así: (49). Así nos dan una visión más completa de las regiones en que esos planos dividen el espacio. Si consideramos que el diedro representado es el origen del Sistema Diédrico es conveniente darse cuenta de que si abatimos la parte delantera del plano horizontal sobre el plano vertical girándolo hacia abajo alrededor de la Línea de Tierra a la vez la parte posterior del plano horizontal caerá sobre la parte superior del plano vertical: (50). Ambos planos se superponen en un único plano: el de representación o plano del cuadro.

Teniendo en cuenta lo que decíamos antes de que las líneas rectas continúan comprenderemos que estas dos figuras (51) de la parte superior no representan dos planos distintos, sino el mismo plano, como vemos en la figura de abajo. En este dibujo vemos otro tema importante ya aludido: la convención gráfica que se aplica a las partes vistas y a las ocultas.

Otro tema muy importante es la nomenclatura. No hay más que ver esta figura (52) para darse cuenta de ello. Es el mismo dibujo en los dos casos y sólo la nomenclatura permite saber lo que está representado en él.

Yo haría ahora una recomendación muy importante para el estudiante: que nunca trace una línea en el papel sin saber lo que significa exactamente. Dicho de otra forma: que a cada línea que trace se detenga a reflexionar sobre lo que ella significa.

Tras estas recomendaciones previas hagamos el *paragone* entre los sistemas de representación por un lado y dos juegos muy conocidos por otro: el ajedrez y el fútbol. Ya sé que el primero tiene muchos menos seguidores, pero quizá su práctica ayude a entender mejor la Geometría, cosa que no sucede con el fútbol.

En cualquier caso un juego se juega sobre un campo o terreno, lo juegan siempre dos o más jugadores que utilizan lo que en la mayoría de los juegos de mesa se llaman fichas, aunque en el ajedrez –que es también un juego de mesa- se llaman piezas (53) y en el fútbol es sólo una y se llama balón (54a). No quiero desaprovechar la oportunidad para hacer ver que el balón reglamentario de fútbol es un poliedro, uno de los sólidos de Arquímedes, denominado icosaedro truncado (54b), obtenido truncando los vértices del icosaedro regular; posee 32 caras, de las que 20 son hexágonos regulares y 12 pentágonos regulares. Al inflarlo con aire adopta la forma esférica.

Pero lo más importante de todo son las reglas del juego (el reglamento), en el cual tienen mucho que ver las marcas o señales que estructuran el campo o terreno de juego. En el ajedrez es la cuadrícula de ocho por ocho (55) y en el fútbol las líneas rectas y curvas que definen las correspondientes áreas (56). En ambos casos esos trazados marcan las reglas del juego, que se traducen en el comportamiento de los jugadores y los movimientos de las fichas.

La forma de ganar es distinta en cada uno de estos juegos. En el ajedrez se gana reduciendo al contrario a la impotencia que establecen las reglas: si al dar jaque al rey contrario no hay posible defensa éste pierde en jaque mate. En el fútbol gana el equipo que más veces mete el balón en la puerta contraria. En ambos juegos ocurre que se hacen presentes las posibilidades implícitas en las reglas del juego condicionadas por el trazado del campo.

Está claro que a jugar se aprende jugando. Hay que entrenarse, hay que familiarizarse con el terreno de juego y saber interpretar sus marcas, así como conocer las reglas del juego.

Ocurre también que los juegos tienen una terminología propia que se refiere a las incidencias y operaciones concretas que surgen en su desarrollo: gol, penalty, fuera, falta, enroque, jaque, jaque mate, tablas. Los hechos se hacen palabras para poder conocerlos y manejarlos. Es preciso aprender este lenguaje para saber jugar.

Pues bien, un sistema de representación es también un juego. Veamos por qué.

El campo de juego es un plano –el papel en el que dibujamos- y cada sistema de representación pone sobre él antes de empezar el juego unas marcas que le son propias y que hay que conocer bien para poder jugar bien (57a-b-c).

¿Quiénes son los jugadores? La persona -estudiante o profesor- que quiere representar algo en el papel es uno de los jugadores. ¿Y su contrario? Su contrario es el espacio geométrico, misterioso y callado oponente que sólo se manifiesta a través de las fichas del juego. estas fichas son los elementos geométricos: los puntos, las rectas, los planos, las curvas, los sólidos, las superficies. Así como en el fútbol los movimientos de los jugadores se concretan en los de una ficha-comodín que es el balón, así en el juego de las representaciones podemos conocer los elementos geométricos más complejos a partir de sus puntos.

Es un curioso juego en el que uno de los jugadores se manifiesta sólo a través de sus fichas. Así saber jugar es hacer que el contrario se manifieste, representar al otro jugador con sus propias fichas. En una palabra: saber manejar los elementos geométricos y las reglas que los rigen: las definiciones, los postulados, los axiomas, los teoremas y corolarios de la Geometría Euclidiana y de la Geometría Proyectiva.

Pero ¿quién gana en este juego? Aquél que sea capaz de representar sobre el papel el objeto o la situación geométricos que se le han solicitado.

Por último este juego de las representaciones, en sus distintas versiones, posee una terminología propia (nomenclatura y notaciones) y unas convenciones gráficas que forman parte del reglamento y que hay que conocer bien para poder jugarlo con soltura.

Sirva el Sistema Diédrico como ejemplo para realizar esta comparación con el juego que propongo, pero podemos hacer lo mismo con los demás sistemas de representación.

Veamos sólo un ejemplo muy sencillo para entender cómo podemos jugar en Sistema Diédrico (58). La figura nos muestra un segmento de una recta horizontal que tiene dos pequeños segmentos debajo de sus dos extremos y un segmento de una recta vertical –perpendicular a la otra por lo tanto- cuyos extremos están nombrados como P_1 y P_2. Aquí tenemos el campo de juego con su única marca (la línea de tierra) y una ficha del juego en una determinada posición (las proyecciones horizontal y vertical del punto). Para entender esta posición del juego debemos saber interpretar correctamente tanto la marca del campo como la posición de la ficha, para lo cual debemos recurrir al reglamento. Éste dice que el plano de representación o plano del cuadro es en realidad un plano doble, resultado de haber abatido el plano horizontal (vertical) de un diedro rectángulo sobre el plano vertical (horizontal) del mismo alrededor de la recta de intersección entre ambos y que esa única marca en el campo de juego (la recta horizontal que tiene dos pequeños segmentos debajo de sus dos extremos) representa precisamente la intersección de los dos planos del diedro y se denomina línea de tierra; que cada elemento del espacio tiene dos proyecciones, una sobre cada uno de los planos del diedro y que la dirección con la que se proyectan los elementos es ortogonal a cada uno de esos planos. Así podemos restituir mentalmente lo que vemos sobre el plano del papel a su posición en el espacio. Esa posición la vemos en esta otra figura, pero desde fuera del sistema (59).

Creo que es bueno aprovechar esta figura para aprender unas cuantas cosas. La primera que los rayos proyectantes del punto P son rectas perpendiculares cada una a uno de los planos de proyección y que como tales tienen sus proyecciones. La perpendicular al plano vertical tiene a P_2 como proyección vertical (punto que es a la vez su traza vertical o intersección con ese plano) y como proyección horizontal la perpendicular por P_1 a la línea de tierra. Lo mismo se diría del rayo proyectante sobre el plano horizontal. A su vez la línea P_1P_2 sería las dos trazas confundidas del plano P_1PP_2. Finalmente la intersección de este plano con los del diedro daría las líneas de máxima pendiente de estos dos últimos, que forman, como ya sabíamos, un ángulo recto.

Naturalmente da lo mismo abatir el plano horizontal sobre el vertical que el vertical sobre el horizontal, pues el resultado es el mismo. En el primer caso será el punto P_1 el que gire para situarse por debajo de la línea de tierra y en el otro será el punto P_2 el que gire para situarse por encima de dicha línea. Pero en ambos casos ese giro se realiza siempre dentro del plano P_1PP_2 que es perpendicular al eje de giro (la línea de tierra). Dado que en unos textos se hace de una manera y en otros de otra debemos plantearnos que quizá una de esas maneras resulte más apropiada para unos, mientras que la otra lo resultará para otros. Esto tiene connotaciones didácticas, ya que en un mismo grupo habrá alumnos a quienes resulte más propio uno de esos abatimientos y otros a quienes resulte mejor el otro. Bastará con que el profesor les haga ver esta circunstancia y que tanto él como los alumnos la tengan en cuenta en todo momento, pero optando por una de las dos posibilidades.

Yo he decidido que sea el plano horizontal el que se abate sobre el vertical porque la pizarra, sea tradicional o digital, está en posición vertical y así el alumno podrá seguir mejor la explicación. Por tanto hemos de imaginar el plano horizontal del diedro pasando por la línea de tierra y en posición ortogonal al plano de la pizarra (plano del papel para el alumno). Después, por cada una de las proyecciones P_1 y P_2 trazaremos una recta perpendicular al plano en el que están y veremos que ambas rectas se cortan en un punto que es el P, cuyas proyecciones ortogonales sobre el diedro son P_1 y P_2. Ahora vemos que al abatir el plano horizontal sobre el vertical la proyección horizontal P_1 del punto P se coloca sobre la prolongación de la vertical por P_2, que es siempre perpendicular a la línea de tierra. El plano que contiene a los puntos P, P_1 y P_2 es un plano perpendicular a la línea de tierra (plano de perfil). Esto nos permite deducir que cuando abatimos un plano sobre otro cualquier punto del primero gira dentro de un plano que es perpendicular al eje de giro, eje que es la recta de intersección entre ambos planos.

EL ABATIMIENTO CON LA AYUDA DE SUPERMAN/ RABATTING A PLANE WITH SUPERMAN'S HELP

Hemos visto cómo al abatir el plano horizontal del diedro el punto P gira dentro de un plano perpendicular a la línea de tierra, que es el eje de giro. El razonamiento deductivo nos permite decir que cualquier situación geométrica que afecte a los elementos geométricos fundamentales (punto, recta y plano) se produce siempre de la misma manera, independientemente de cómo estén situados dichos elementos en el espacio con respecto al plano del cuadro y a nosotros. Así podemos decir que cuando un punto gira alrededor de una recta lo hace siempre dentro de un plano perpendicular a dicha recta.

Cuando yo explicaba el abatimiento de un plano con el espíritu que siempre me ha guiado de hacer ver con claridad a los estudiantes cómo se producía bajaba de la tarima, me acercaba a la puerta del aula y les pedía que se fijasen en el centro del ojo de la cerradura, como si fuera un punto geométrico, mientras yo la giraba hacia un lado y otro varias veces. Luego les hacía ver que en ese giro la distancia de ese punto al suelo era siempre la misma y que por tanto ese punto giraba dentro de un plano paralelo al suelo, es decir, perpendicular al eje de giro, que es vertical. Luego les decía que imaginasen que, manteniendo la puerta abierta, fuéramos capaces de arrancarla con su marco de la pared sin deformarla en absoluto y que la tirásemos por la ventana (como si fuéramos Superman). La puerta caería posiblemente dando vueltas en el aire, girando a un lado y otro sobre sus goznes o eje de giro, hasta quedar finalmente en el suelo, donde quedaría sin deformación alguna. Pues bien, en sus evoluciones por el aire el centro de la cerradura en los giros de la puerta en distintas posiciones durante la caída seguiría girando dentro del plano que lo contiene y que es perpendicular al eje de giro. También si una vez que hubiese aterrizado en el suelo sin deformarse para nada alguien hiciese girar la puerta el punto de la cerradura seguiría girando dentro del mismo plano perpendicular al eje de giro independientemente de la posición en que la puerta quedase depositada sobre el suelo.

Es decir, el abatimiento se produce siempre de la misma forma, independientemente de la posición en que se presente ante nosotros.

SALIRSE DEL SISTEMA PARA DOMINARLO/ GETTING OUT OF THE SYSTEM IN ORDER TO DOMINATE IT

Estas figuras que nos sirven para comprender cómo funciona el juego denominado Sistema Diédrico (60) nos permiten salirnos del sistema para dominarlo, ver el sistema desde fuera para entender mejor lo que estamos representando. Nos permite también ver con claridad los cuadrantes en que los dos planos del diedro dividen al espacio geométrico.

Son importantes las flechas que indican el sentido en que el plano horizontal del diedro gira hasta coincidir con el plano vertical haciendo del plano del cuadro un plano doble. Las flechas nos hacen ver un antes y un después del movimiento que indican y que, por lo tanto, lo que se representa son dos momentos del proceso. Para comprender el final del proceso representado en esta figura hay que especificar que el observador se debe situar en el primer cuadrante y de frente al plano vertical.

Estos esquemas en los que vemos el sistema diédrico desde fuera son en realidad representaciones axonométrica o caballera cuya ventaja sobre el diédrico es que nos permiten representar de una sola vez las tres dimensiones del espacio.

ADVERTENCIA SOBRE SISTEMA DIÉDRICO DIRECTO/ WARNING ABOUT THE DIRECT DIHEDRAL SYSTEM

Sabemos que esta modalidad elimina la línea de tierra al considerar que los planos del diedro pueden ser cualesquiera (61), siempre que sean ortogonales entre sí, y sólo considera las posiciones de los puntos relacionadas entre sí mediante rectas horizontales y verticales que marcan el desplazamiento o alejamiento de un punto respecto al otro en horizontal y la cota en vertical. Coordenadas cartesianas en definitiva.

Yo no explicaría esta modalidad sin antes haberme asegurado de que los alumnos han comprendido a fondo el sistema diédrico tradicional, ya que el espacio geométrico en el método directo puede resultar difícil de comprender al faltarle referencias claras como las que ofrece el método tradicional y el estudiante podría sentirse como un astronauta flotando en el espacio pero sin haber recibido el entrenamiento adecuado para ello.

LÍNEA DE MÁXIMA PENDIENTE ENTRE DOS PLANOS/ MAXIMUM PENDING LINE

En la figura (62) vemos las líneas de máxima pendiente de un plano con respecto a los dos planos de proyección. Lo acabamos de ver en la figura anterior, pero afiancemos este conocimiento. Lo primero es tener muy claro qué significa línea de máxima pendiente para poder entender esta representación. La definición es muy precisa: línea de máxima pendiente de un plano con respecto a otro es la que forma con éste el mayor ángulo posible. Esto se consigue cortando ambos planos por un tercero que sea perpendicular a ambos a la vez, es decir, perpendicular a la recta de intersección de ambos. Por lo tanto la línea de máxima pendiente de un plano α sobre el plano horizontal es la intersección de α con un plano que sea perpendicular tanto al plano α como al plano horizontal. Es decir, es un plano proyectante sobre el plano horizontal cuya traza horizontal es perpendicular a la traza horizontal del plano α.

Para que el alumno entienda lo que es la línea de máxima pendiente: vayamos a una esquina del aula cuyas paredes formen un ángulo recto y pongamos una escuadra en horizontal con el vértice en la arista de la esquina (63). El plano de la escuadra es perpendicular a los de las paredes y las líneas de máxima pendiente de una con respecto a la otra son los catetos de la escuadra que forman un ángulo recto entre ellos. Ahora, manteniendo fija la hipotenusa de la escuadra sujeta en sus dos extremos a las paredes girar la escuadra hacia arriba y hacia abajo para hacer ver que las líneas de intersección del plano de la escuadra con las paredes en cualquier posición que la coloquemos forman un ángulo menor de 90º, por lo que queda claro que las líneas de máxima pendiente las produce el plano de la escuadra en su posición horizontal. (64a,b).

PASO DE UN SISTEMA A OTRO/ MOVING BETWEEN ONE SYSTEM AND ANOTHER

Cuando se ha diseñado un objeto en sistema diédrico (planta, alzado y perfiles) y se quiere realizar un vista volumétrica del mismo, ya sea en axonometría o en perspectiva lineal lo más didáctico es considerar el diedro más el plano de perfil como el triedro de la axonometría y luego aplicarle el coeficiente de reducción o escala gráfica. Si la vista que se quiere obtener es en perspectiva lineal lo ideal es situar el plano del cuadro y el punto de vista de la perspectiva en la representación diédrica (65) lo que nos permite controlar qué vista del objeto vamos a realizar. Una vez decidido esto tomaremos de la representación diédrica los datos necesarios para situarlos sobre el plano del cuadro de la perspectiva.

Si el proceso es al contrario, es decir, si queremos obtener la planta de un objeto en diédrico a partir de su perspectiva, ya sea lineal o axonométrica, habremos de abatir el plano horizontal de éstos sistemas para encontrar la forma real de la planta. En axonometría haremos lo mismo con los alzados y en perspectiva lineal llevaremos las alturas al plano del cuadro para luego llevarlas a la proyección vertical del sistema diédrico.

GRAFISMO, NOMENCLATURA Y NOTACIÓN/GRAPHICS, NOMENCLATURE AND NOTATION

Tenemos por una parte la Geometría y la Geometría Descriptiva y por otra su aplicación a las Artes Plásticas y al Diseño. Obviamente estas aplicaciones han de diferir en su ejecución. No es lo mismo la perspectiva que un pintor traza en su lienzo sobre el que va a pintar un cuadro figurativo o realista que la representación mediante planos del diseño de un objeto o de un interior. Sobre esto último existen normativas dictadas por agencia nacionales, como AENOR en España o ASME en los Estados Unidos de América, que dictan normas que regulan las prácticas generales de dibujo, las escalas, el tamaño métrico de la hoja de dibujo y su formato, las convenciones de líneas y letras y las vistas ortográficas y pictóricas de los objetos.

Pero antes de estas normas están las que, atendiendo a esos mismos temas, podemos tomar en consideración en la Geometría Descriptiva. Por lo que yo sé en España existe una gran diversidad de grafismo, nomenclatura y notación empleadas por textos y profesores en los sistemas de representación y sospecho que debe ser lo mismo en los demás países. No es este el momento ni hay tiempo para entrar ahora en este tema. Pero sí quiero subrayar su enorme importancia, así como el hecho indiscutible de que existen nomenclaturas y notaciones que son más coherentes y más didácticas que otras.

Supongo que tendremos ocasión de ver estos temas en algunos de los debates.

FUNCIONES Y USOS DE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN/ FUNCTIONS AND APPLICATIOS OF THE SYSTEMS OF REPRESENTATION

Lo que interesa en la representación sistematizada es que el objeto representado quede perfectamente definido, en unos casos por su apariencia y en otros por sus medidas. Lo primero tiene que ver con la representación pictórica o plástica y lo segundo con la representación fiel al objeto, a su estructuras y a la relación entre sus distintas partes. Así podemos hacer una primera clasificación de los sistemas, pues aunque todos definen el objeto, no todos permiten tomar sus medidas directamente en el dibujo. Unos permiten conocer aspectos o apariencias volumétricos de lo representado (perspectiva cónica o lineal y perspectivas axonométrica y caballera), mientras que el diédrico no lo permite.

Algunos tratadistas denominan sistemas métricos o de medida a los que permiten tomar las medidas del objeto representado, caso del diédrico, y sistemas representativos a los que no permiten esto, pero nos hacen ver las formas y la apariencia de lo representado, caso de la perspectiva lineal. Yo añadiría que las perspectivas axonométricas (ortogonal y oblicua) corresponden a las dos clases, ya que, aparte de ofrecer una imagen tridimensional y representativa permiten tomar las medidas de lo representado conocido el coeficiente de reducción. Se podría decir que los sistemas métricos son los que utilizan la proyección paralela ortogonal, mientras que los representativos utilizan la proyección tanto la proyección central como la paralela oblicua. También en la perspectiva lineal se han planteado métodos para conocer la medida de lo representado, como es el caso de Vignola (66) y Desargues. (67)

Otros tratadistas denominan sistemas analíticos a los que, como el diédrico, ofrecen vistas separadas, pero relacionadas, del objeto y sistemas sintéticos a los que ofrecen una vista integrada del mismo, caso de las perspectivas lineal, axonométrica y caballera.

Así, el sistema diédrico, que es métrico, es fundamental en el caso de la arquitectura, las ingenierías y el diseño industrial, ya que en esas actividades las medidas exactas son fundamentales. Por esa misma razón se utiliza también el diédrico en el patronaje para el diseño de ropa (68).

Los sistemas no métricos atienden al carácter tridimensional del objeto, matizando unos aspectos u otros en función de las características de cada uno.

La perspectiva lineal frontal concentra mucho el espacio (69a-b), mientras que la perspectiva lineal oblicua lo abre; como se ve en estas fotografías de arquitectura que nos dan una perspectiva lineal. En la axonometría el punto de vista es más impersonal y parece estar en todas partes (70a,b). En este grabado japonés es de notar la sutileza con que se definen los tres ejes del espacio. Esta perspectiva es apropiada para representar objetos de menor tamaño en los que las fugas casi no se aprecian por ser muy cortas las líneas en profundidad, como joyas, cajas o muebles pequeños. (71a,b)

LAS OBRAS DE ARTE Y DE DISEÑO COMO MATERIAL DIDÁCTICO/ WORKS OF ART AND DESIGN AS DIDACTIC MATERIAL

Las obras de arte y de diseño son una gran ayuda en la enseñanza de la Geometría y de la Geometría Descriptiva dirigida a los artistas plásticos y a los diseñadores por varias razones.

Por una parte ilustran los distintos usos de los sistemas de representación, así como los distintos casos que se pueden dar en ellos, incitan al estudiante a conocer y comprender estas materias para poder hacer uso de ellas como han hecho los autores de las obras que se les muestran y sirven también para proponer algunos ejercicios de interés para los alumnos.

El arte geométrico (72a,b,c,d), así como sus vertientes dinámicas, el constructivismo y el op-art, al que podríamos denominar como la geometría que vibra, nos ofrecen interesantes ejemplos, así como la escultura. (73a,b,c)

Ya hemos visto la diferencia entre la perspectiva frontal de la oblicua pero interesa ver las diferentes posiciones en altura del punto de vista (74a,b,c).

También hay ejemplos de axonometría como en el grabado japonés que hemos visto y de perspectiva caballera en este otro. (75) En este grabado japonés se expresan sutilmente las tres direcciones de los ejes que construyen el espacio mediante la lámpara de pie al fondo.

La Geometría se manifiesta también en el land-art (76a,b). En danza ha habido y sigue habiendo mucha relación con la geometría (77a,b,c,d) (ballet triádico, Laban, Beckett, Bruce Naumann) hasta el punto de considerarla como escenografía en movimiento.
(https://www.youtube.com/watch?v=pMuvrDwhp4w y https://vimeo.com/114767889). En este caso la geometría en movimiento se hace protagonista al participar plenamente en la coreografía. Creo yo que todos estos ejemplos y muchos similares incitan al aprendizaje de la Geometría.

Por último dos ejemplos de ejercicios de perspectiva a partir de dos obras de arte. El primero lo solía poner en los tiempos en que mi asignatura en la Facultad de Bellas Artes se denominaba Perspectiva, era anual y su horario de tres horas diarias de lunes a viernes. Había tiempo para muchas cosas, entre ellas ésta, cuyo enunciado era "dada una obra de arte conocida realizarla desde otro punto de vista". Según la especialidad de cada alumno se podía hacer un dibujo, un cuadro, un grabado e, incluso, una escultura. En este caso fue un cuadro al óleo (79a,b). El otro ejemplo lo solía poner a los alumnos del curso de formación del profesorado titulado *La representación del espacio* que impartí durante varios años en el Museo Thyssen-Bornemisza en Madrid. Su enunciado decía: con la técnica que cada uno elija representar lo que ve el artífice de Durero y otras veces, como ésta, lo que ve su modelo (80a,b). Huelga decir que estos ejercicios estimulan la percepción espacial y la imaginación del estudiante,

NOTA FINAL/ FINAL NOTE

Todo lo dicho hasta aquí está muy bien y con ello se puede aprender mucha Geometría y mucha Geometría Descriptiva, pero como dice el gran arquitecto Antonio Fernández Alba: "Nos enfrentamos a los interrogantes de las nuevas escalas. El medio ambiente ya no se edifica como aritmética del canon humano, habrá que cambiar nuestra percepción posiblemente más que nuestras teorías como, con insistencia, advertían los pintores metafísicos de las vanguardias".

BIBLIOGRAFÍA

El juego de las representaciones, Departamento de Publicaciones, Escuela Técnica Superior de Arquitectura (UPM), Madrid 1978

Los poliedros regulares, Departamento de Publicaciones, Escuela Técnica Superior de Arquitectura (UPM), Madrid 1979

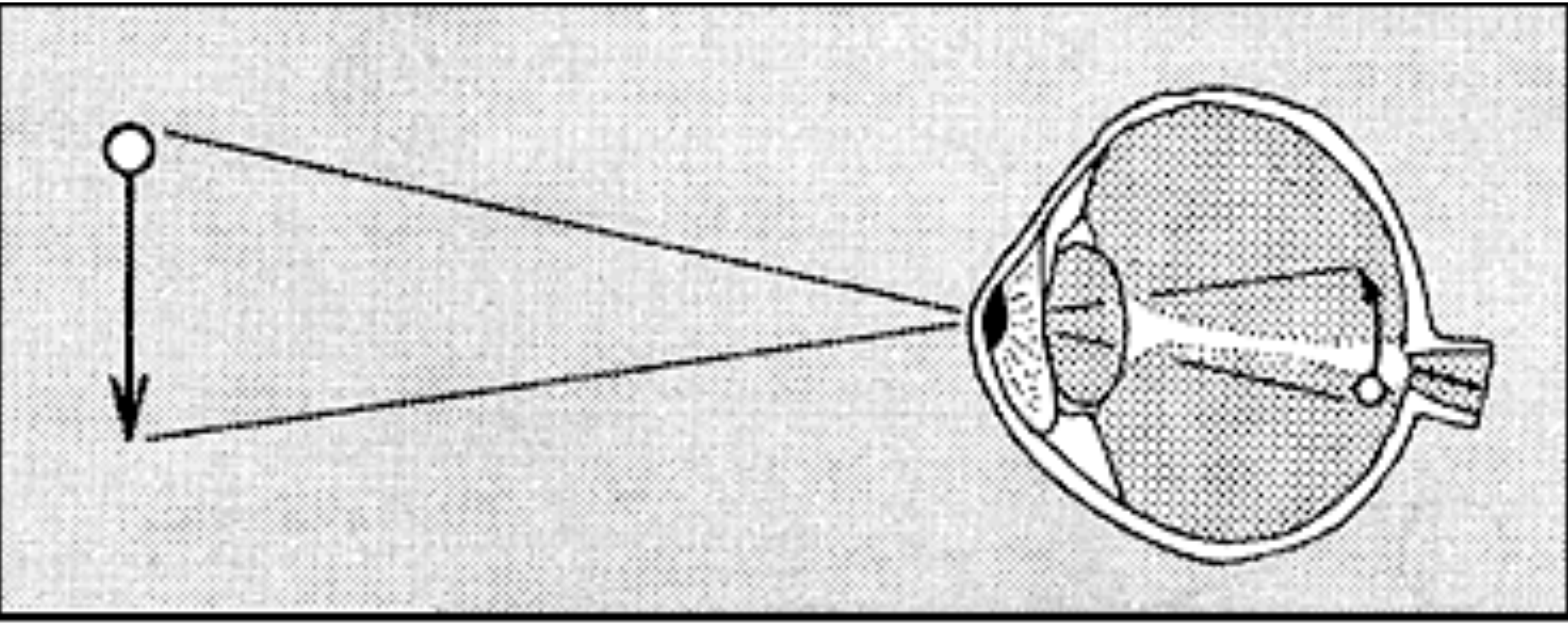
Fundamentos de perspectiva, Editorial Parramón, Barcelona 1986

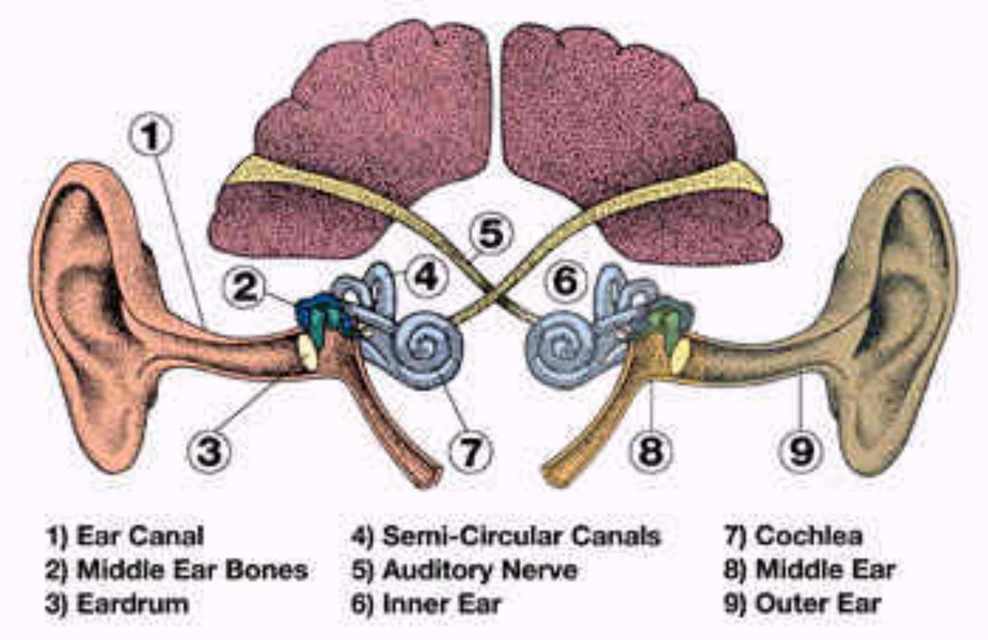
Ampliación de los sistemas técnicos y gráficos, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid 1993

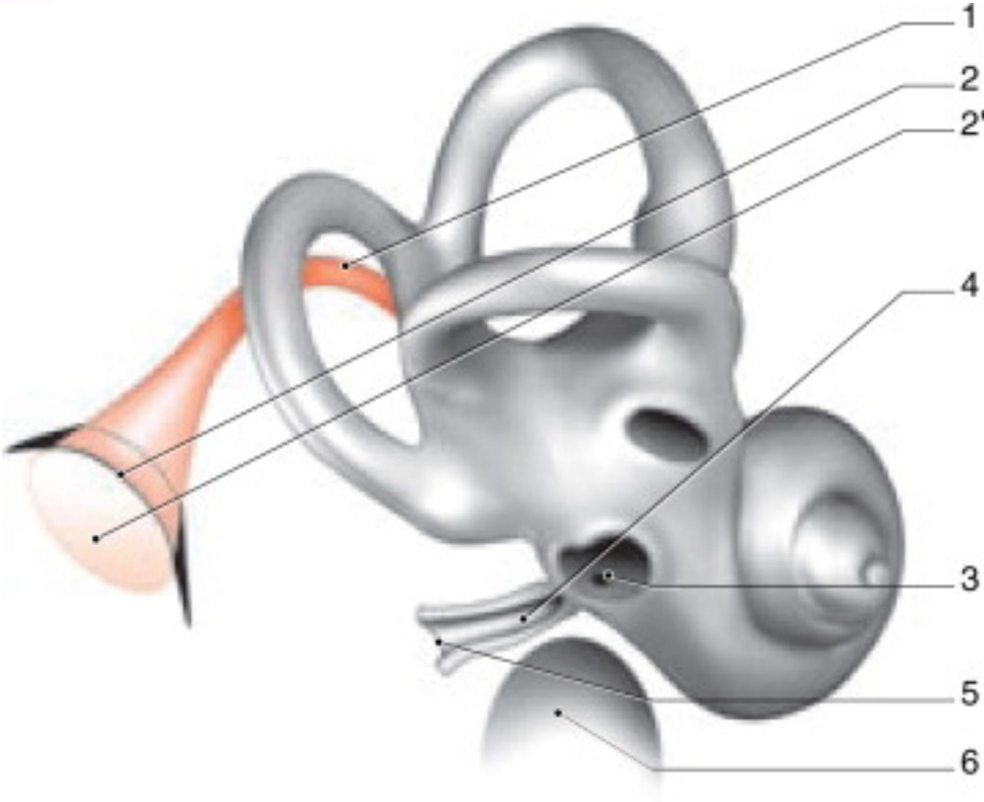
"The *Trattato* in Seventeenth- and Eighteenth-Century Spanish Perspective and Art Theory", in Claire Farago (ed.), *Re-Reading Leonardo. The* Treatise on Painting *across Europe 1500-1900*, Ashgate 2008, pp. 327-348

Forma y representación. Un análisis geométrico, Akal Ediciones, Madrid 2010

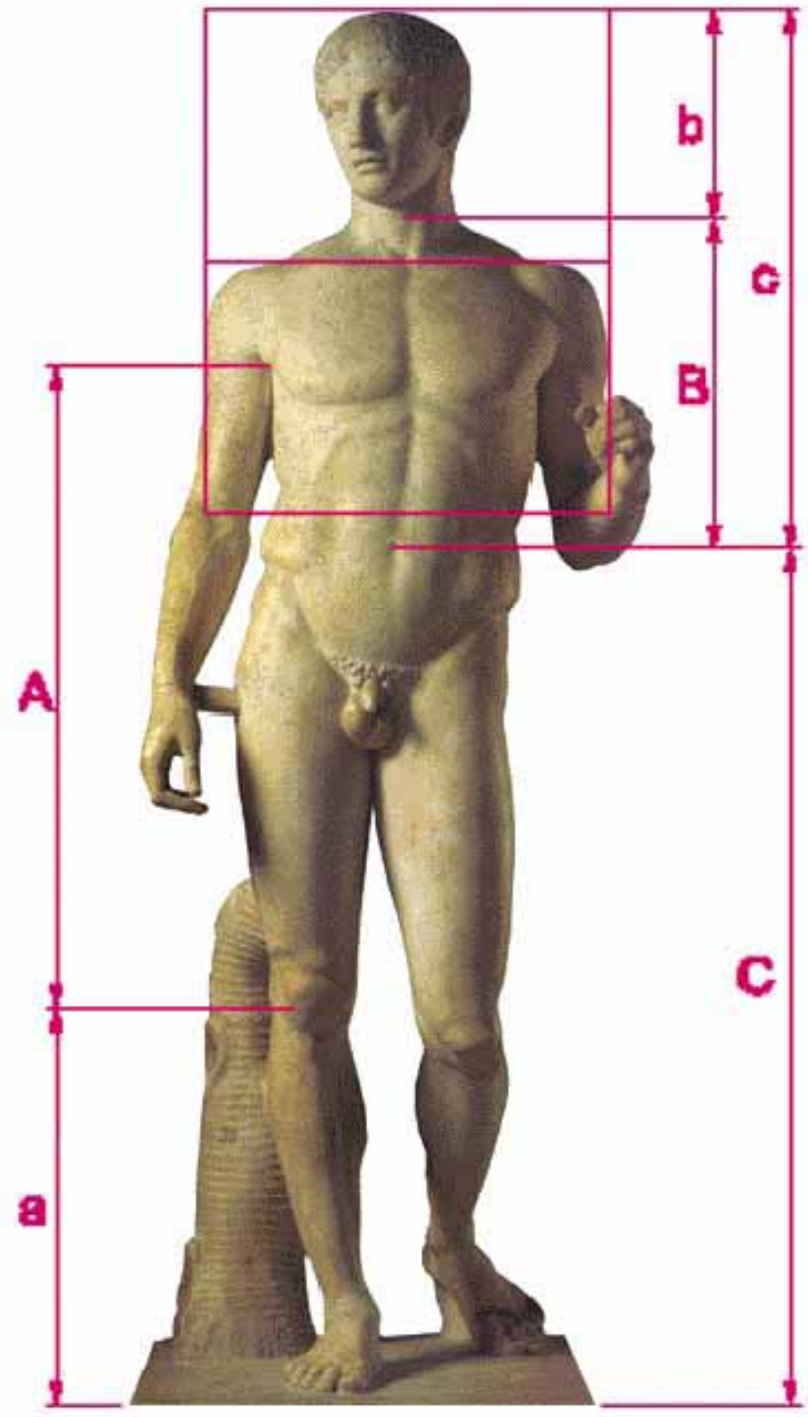
TOWARDS SIMPLICITY IN TEACHING

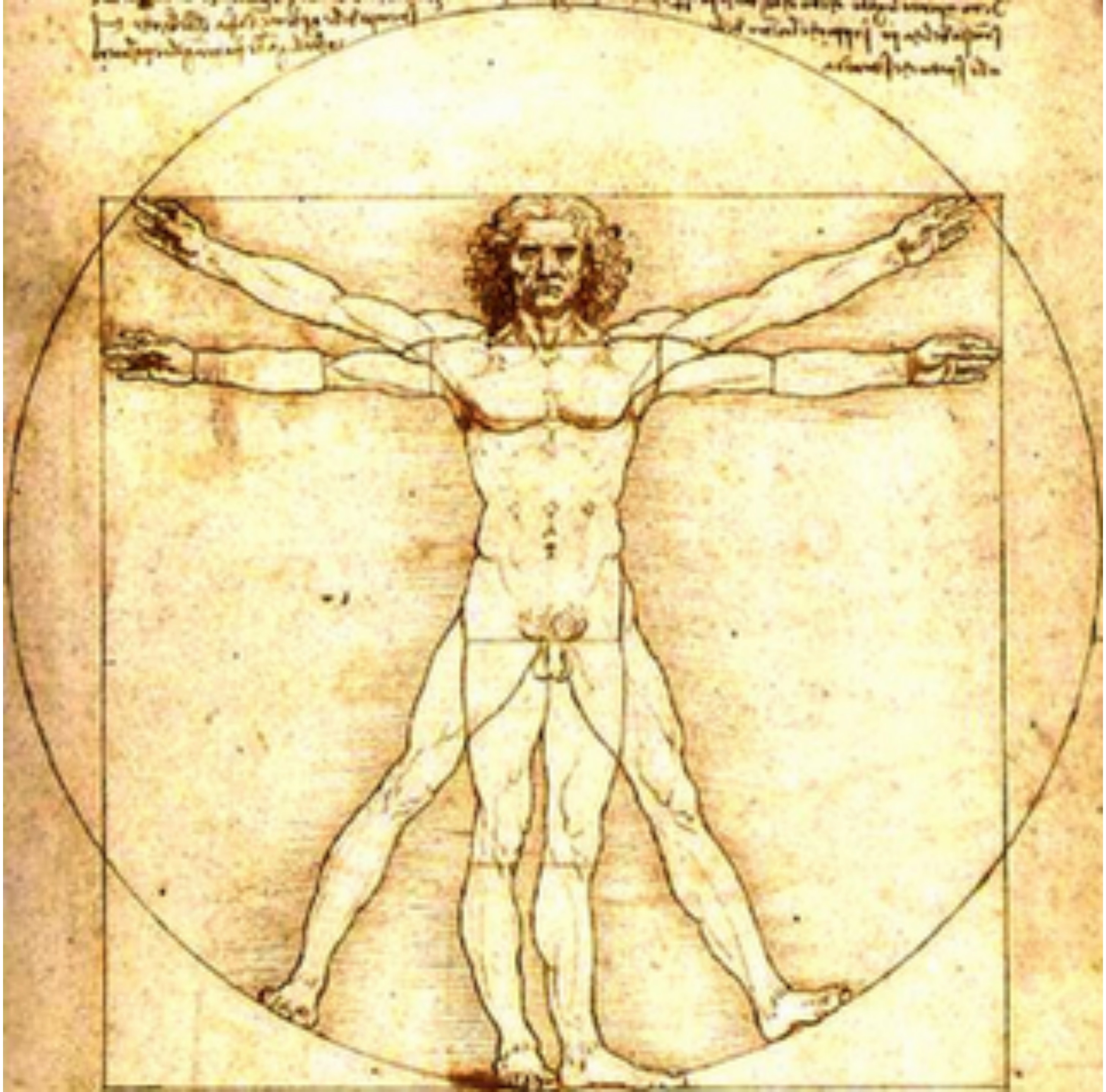


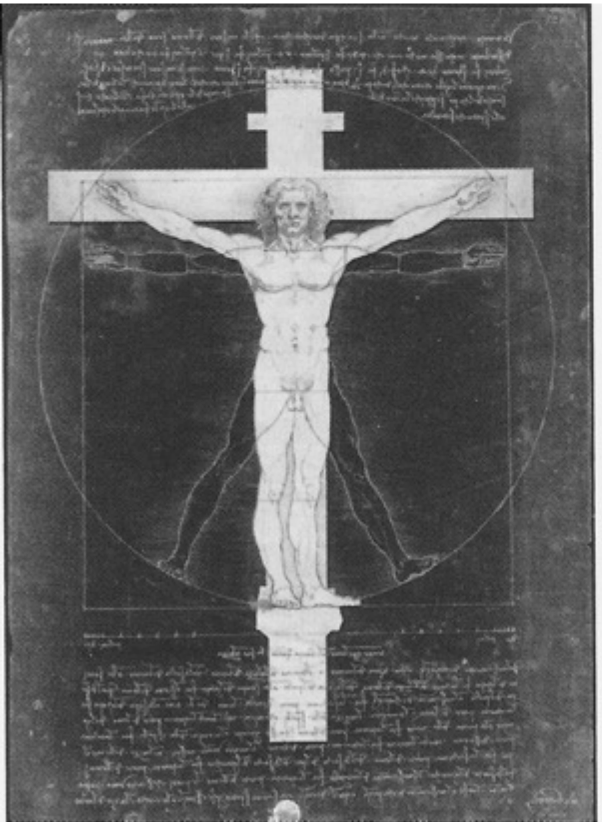

1
2
3
4
5
6
7
8
9
1) Ear Canal
2) Middle Ear Bones
3) Eardrum
4) Semi-Circular Canals
5) Auditory Nerve
6) Inner Ear
7) Cochlea
8) Middle Ear
9) Outer Ear


1
2
2'
4
3
5
6

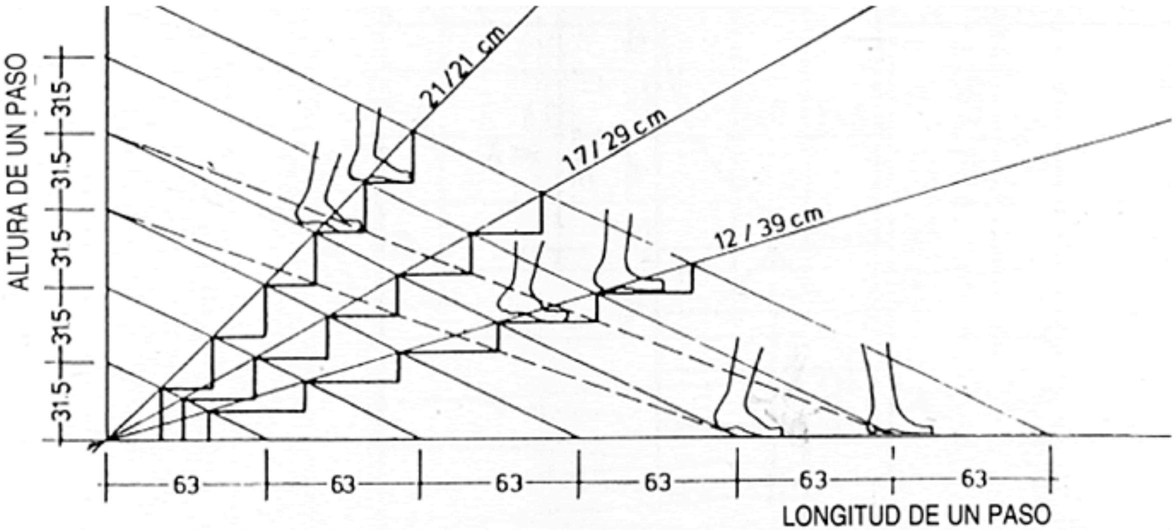

1
2
3
4
5
6
7


b
c
B
A
C
a

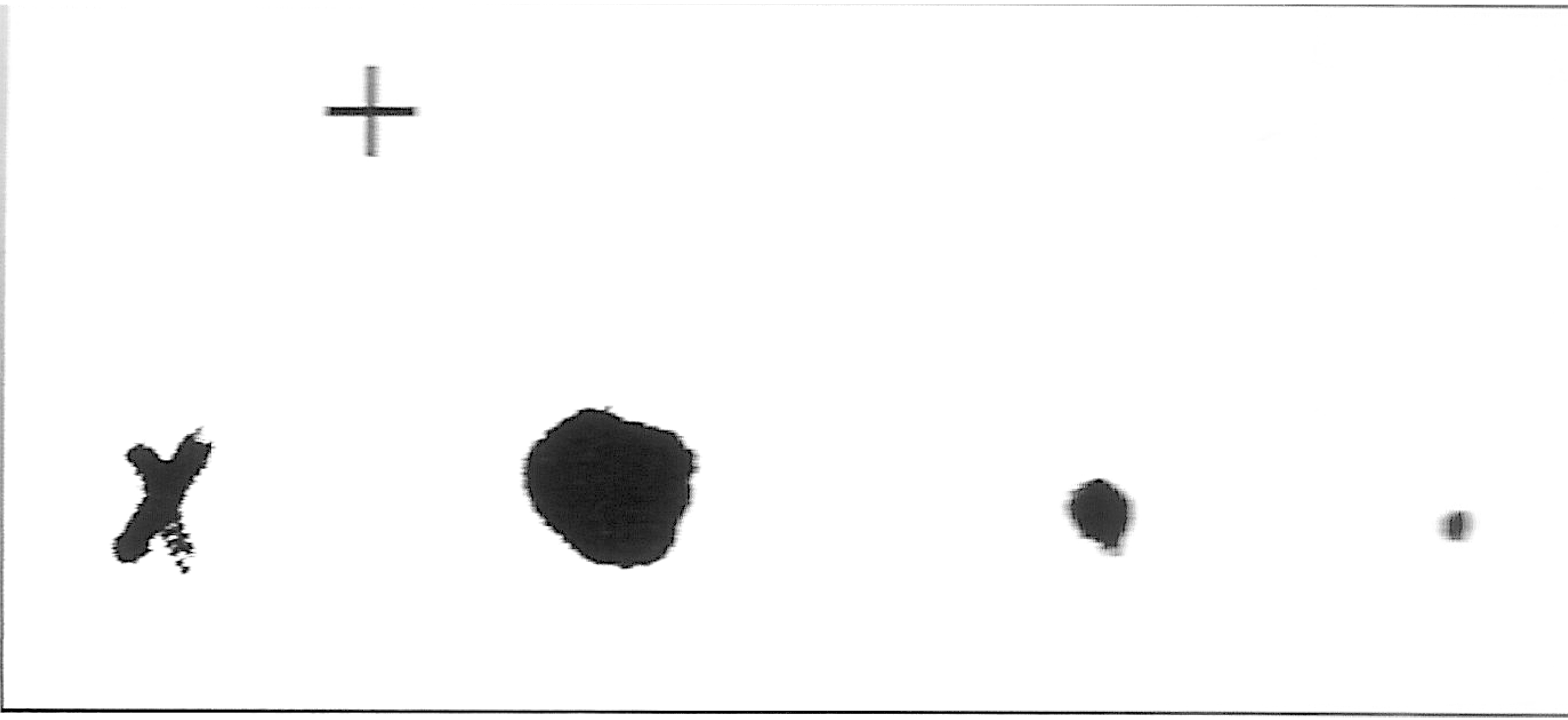


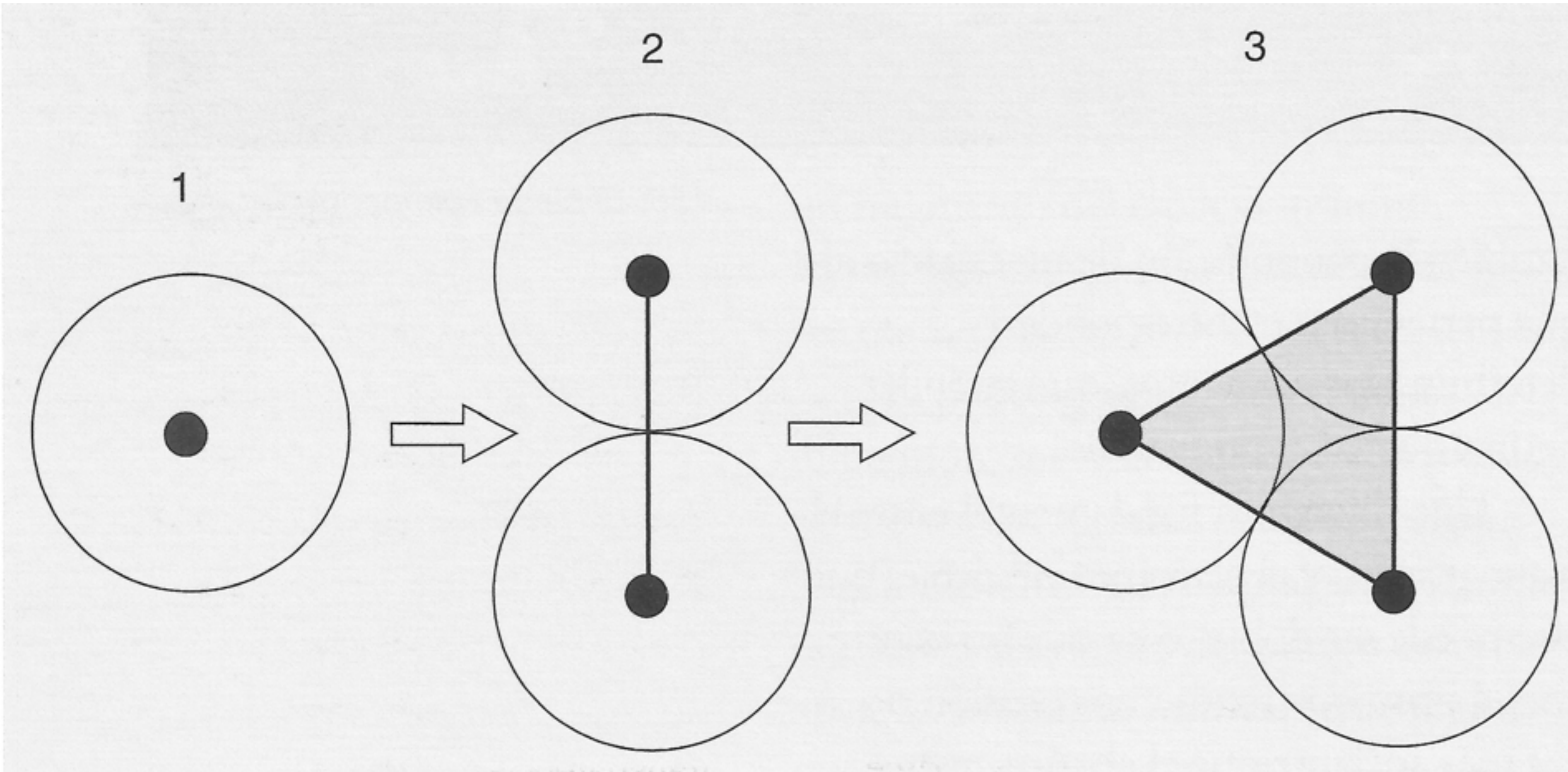


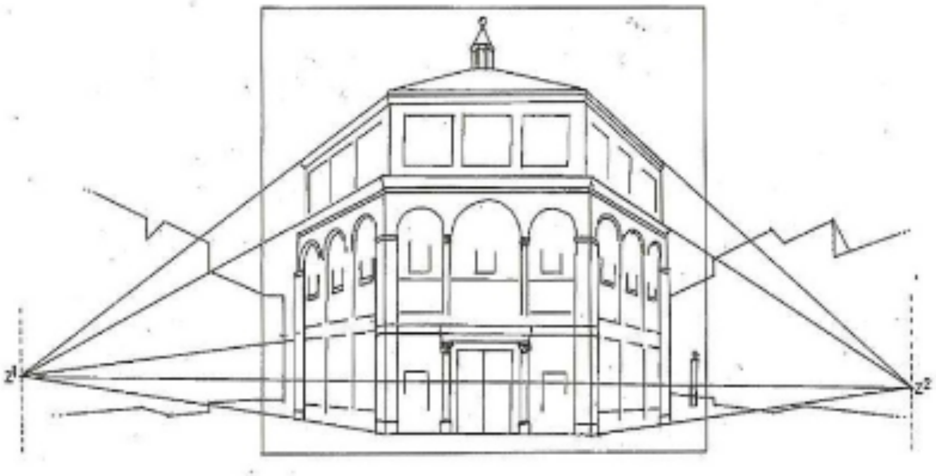

a

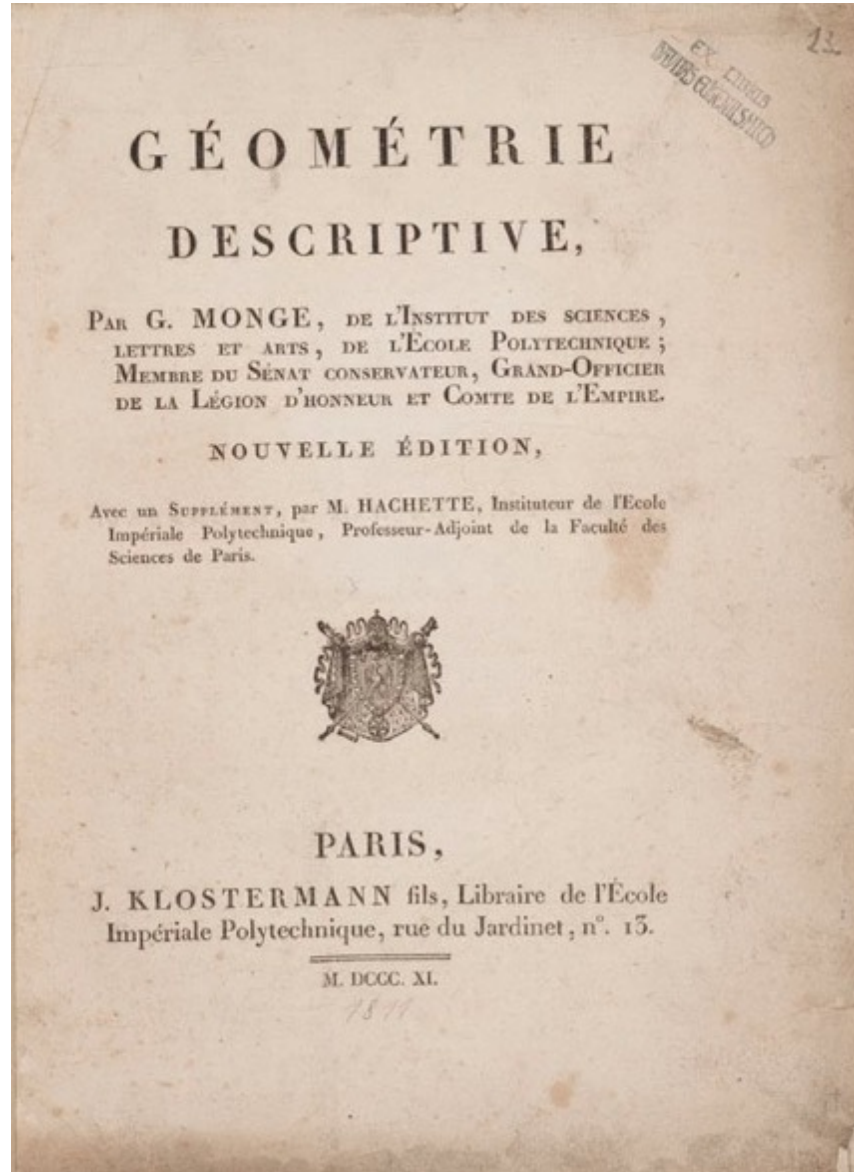


CONSTRUCCIÓN GRÁFICA DE LA RELACIÓN DE PENDIENTE SEGÚN LA FÓRMULA 2CH+H=63




1
2
3





GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

Par G. MONGE, de l'Institut des sciences, lettres et arts, de l'École Polytechnique; Membre du Sénat conservateur, Grand-Officier de la Légion d'honneur et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,

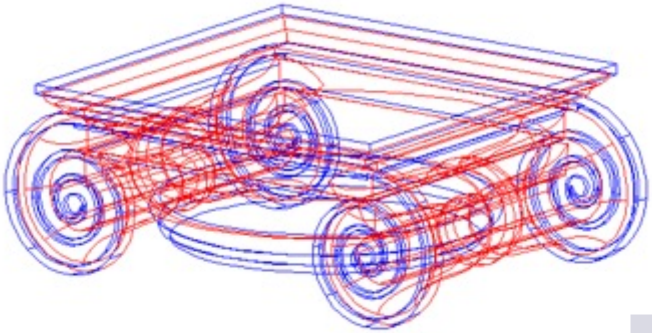
Avec un Supplément, par M. HACHETTE, Instituteur de l'École Impériale Polytechnique, Professeur-Adjoint de la Faculté des Sciences de Paris.

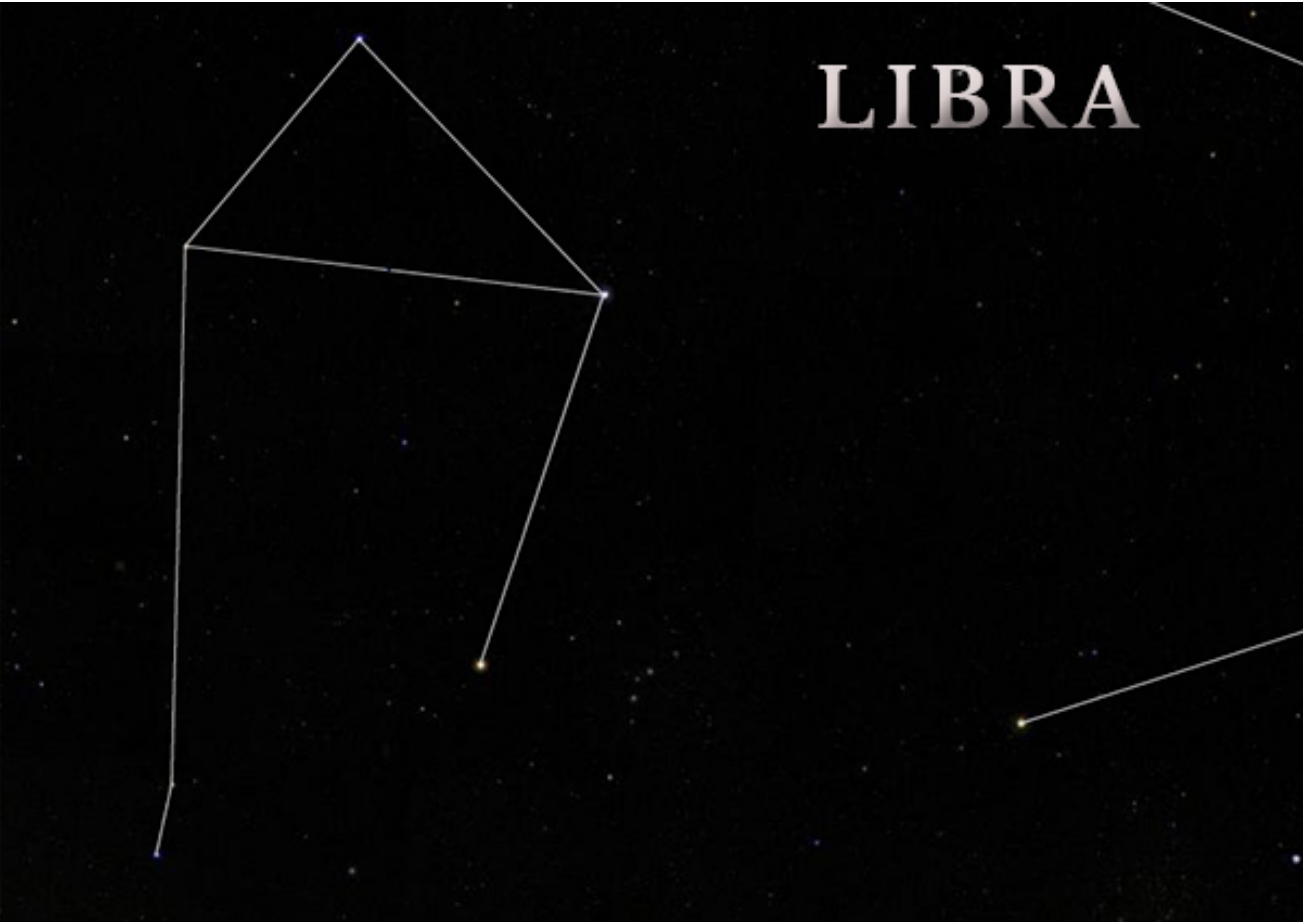
PARIS,

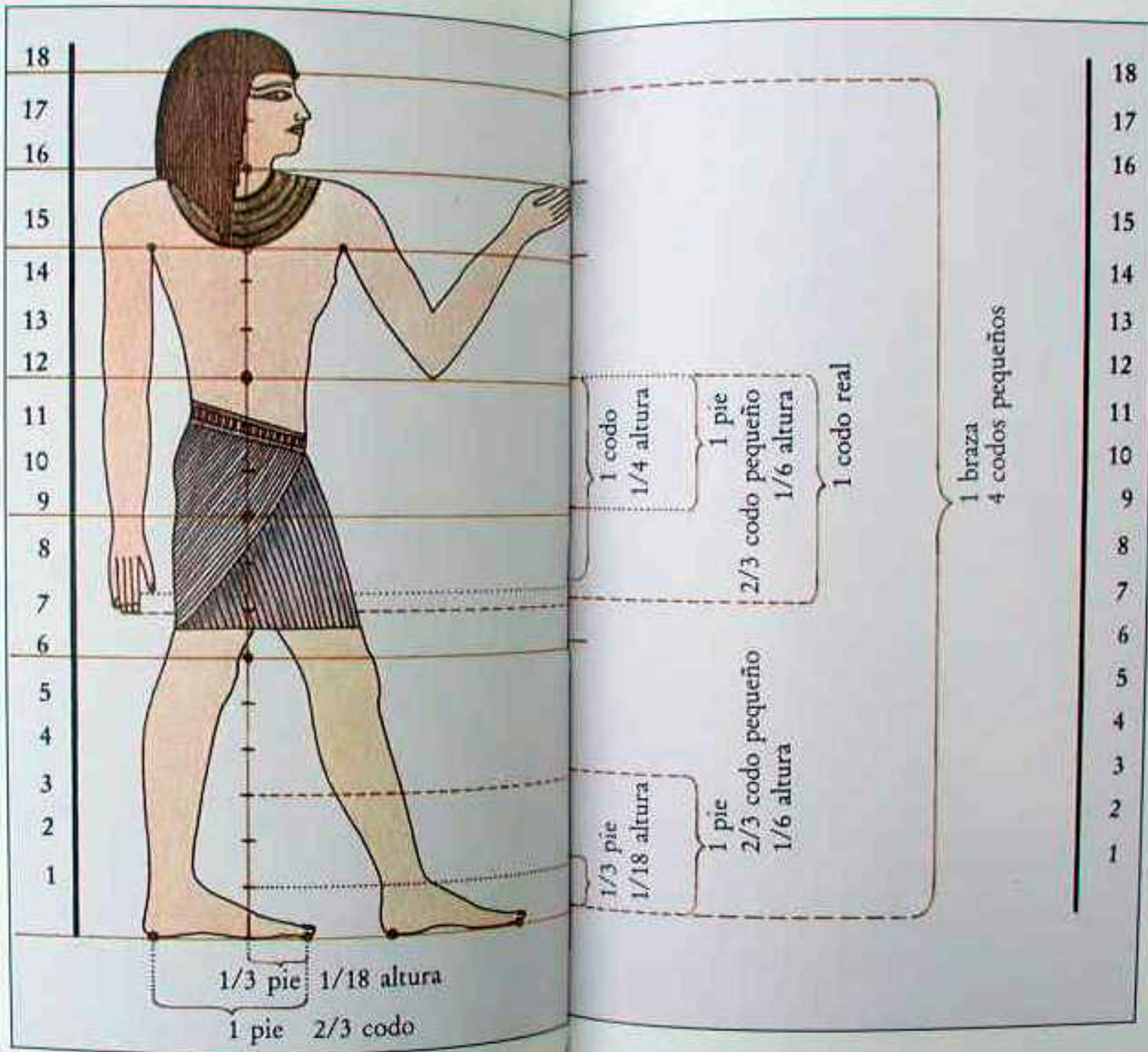
J. KLOSTERMANN fils, Libraire de l'École Impériale Polytechnique, rue du Jardinet, n°. 13.

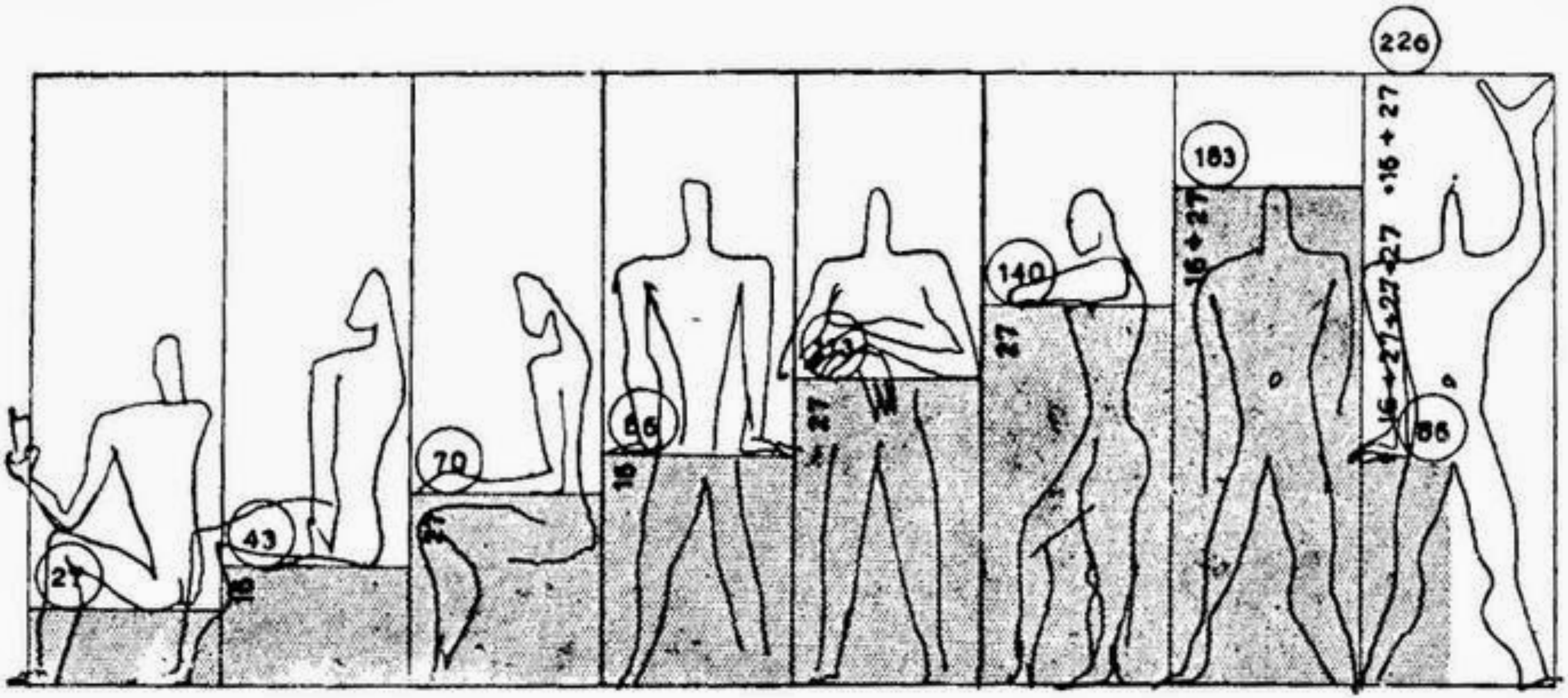
M. DCCC. XI.

1811

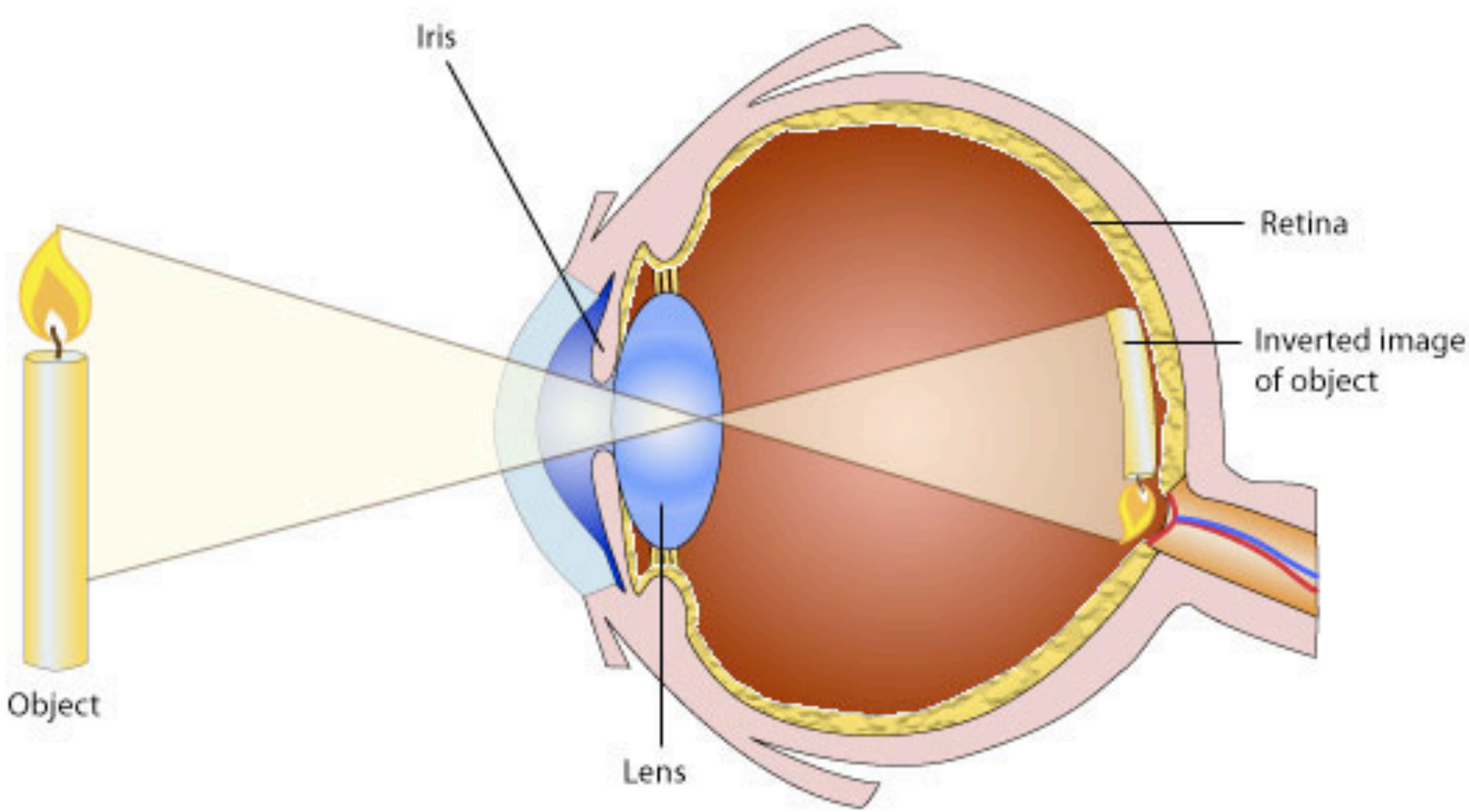


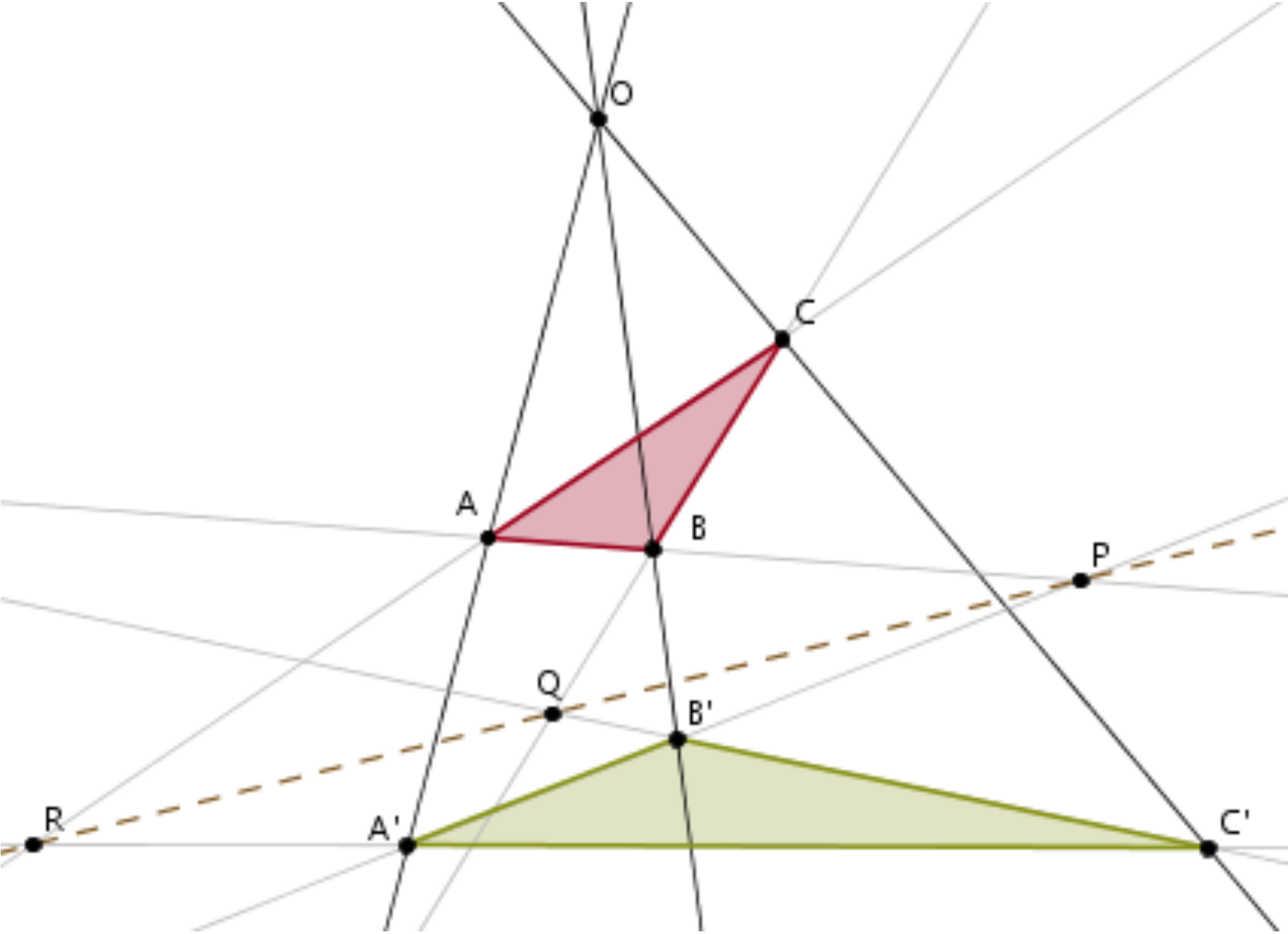

LIBRA

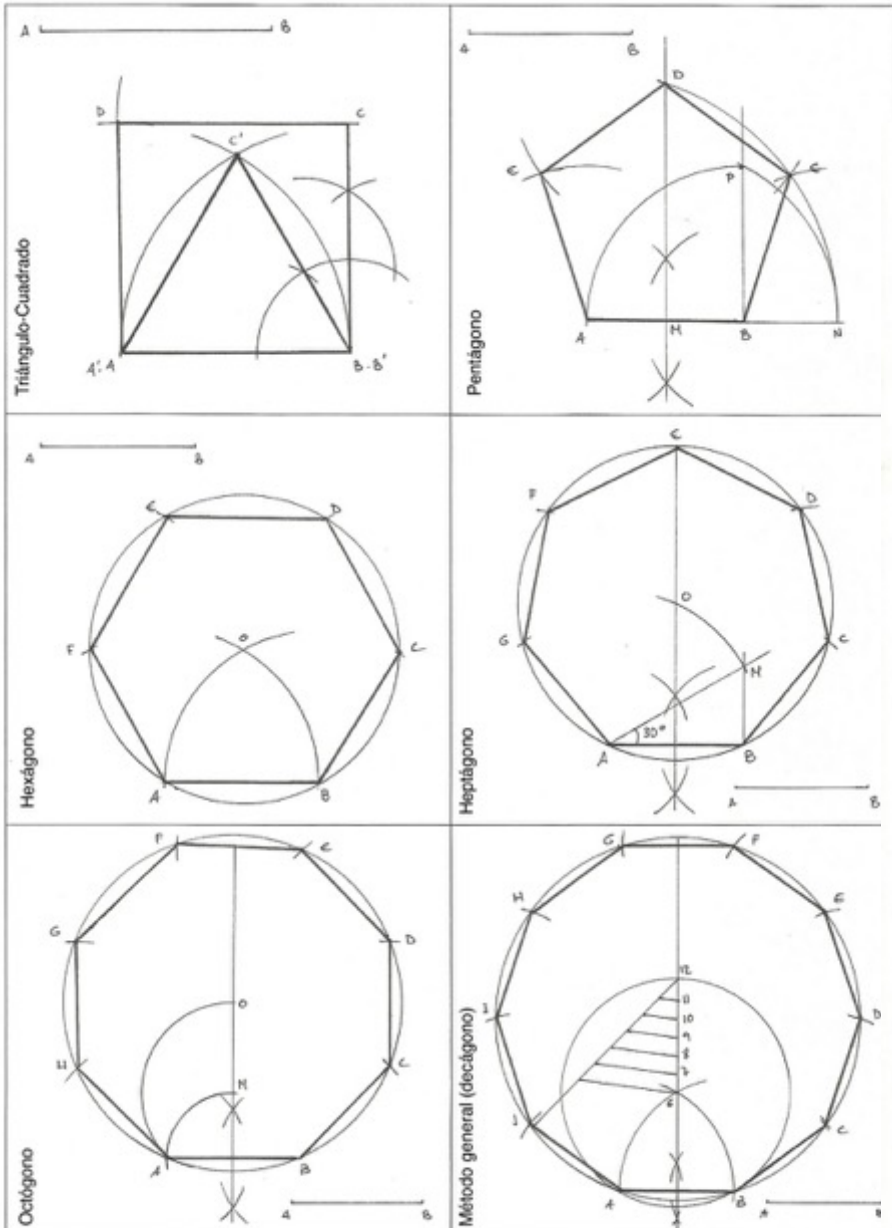

18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1 codo
1/4 altura
1 pie
2/3 codo pequeño
1/6 altura
1 codo real
1 braza
4 codos pequeños
1/3 pie
1/18 altura
1 pie
2/3 codo pequeño
1/6 altura
1/3 pie 1/18 altura
1 pie 2/3 codo


27
43
16
70
27
86
16
27
140
27
183
16 + 27
226
16 + 27
86

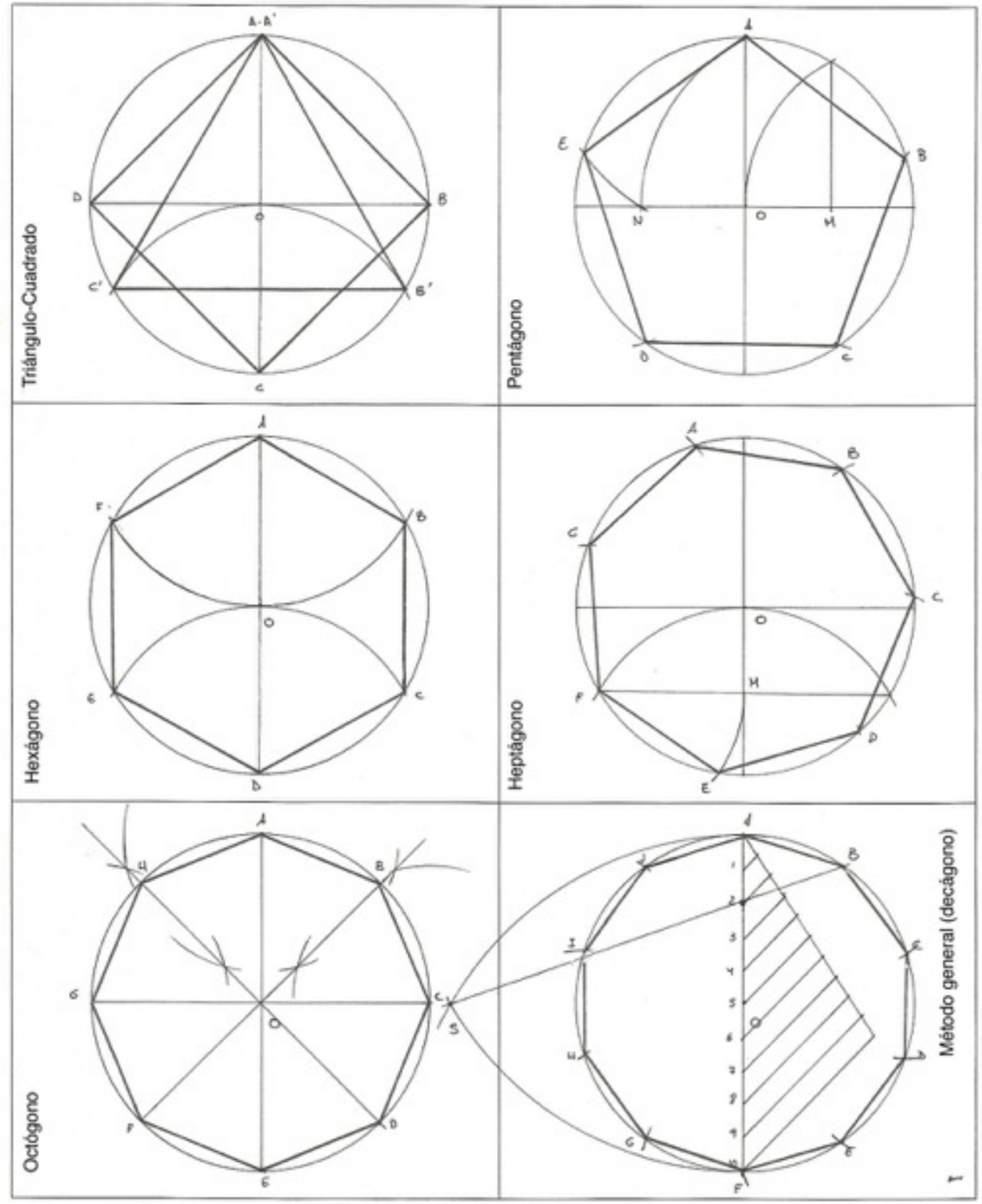
Cross section of Human Eye



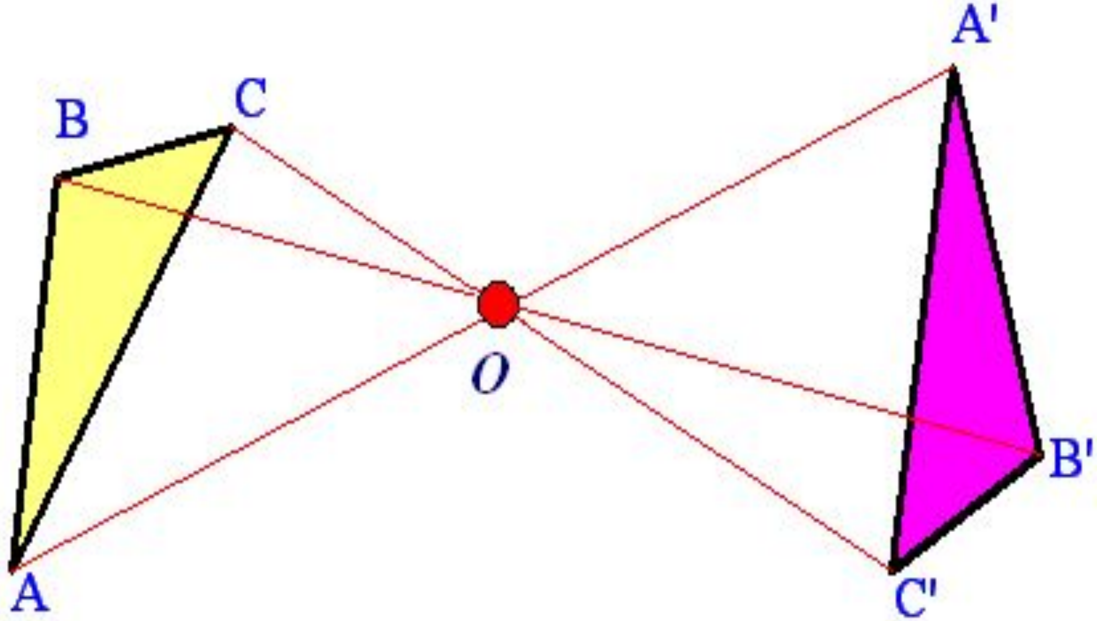

O
C
A
B
P
Q
B'
R
A'
C'

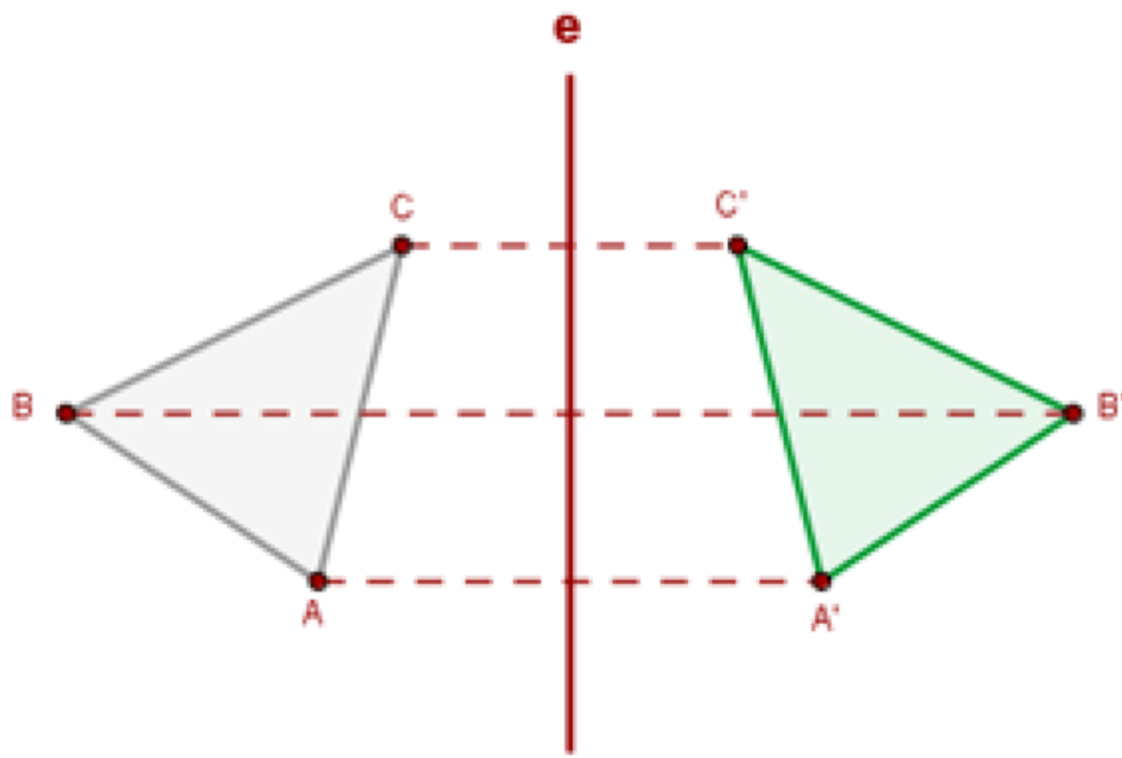


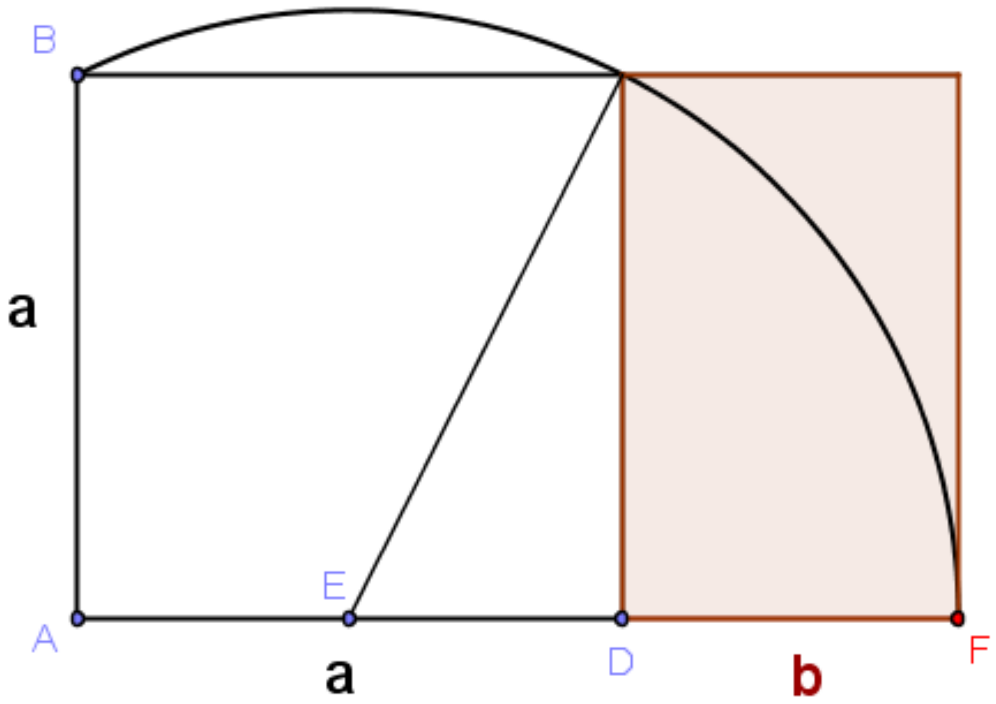
Construcción de polígonos regulares dados un lado

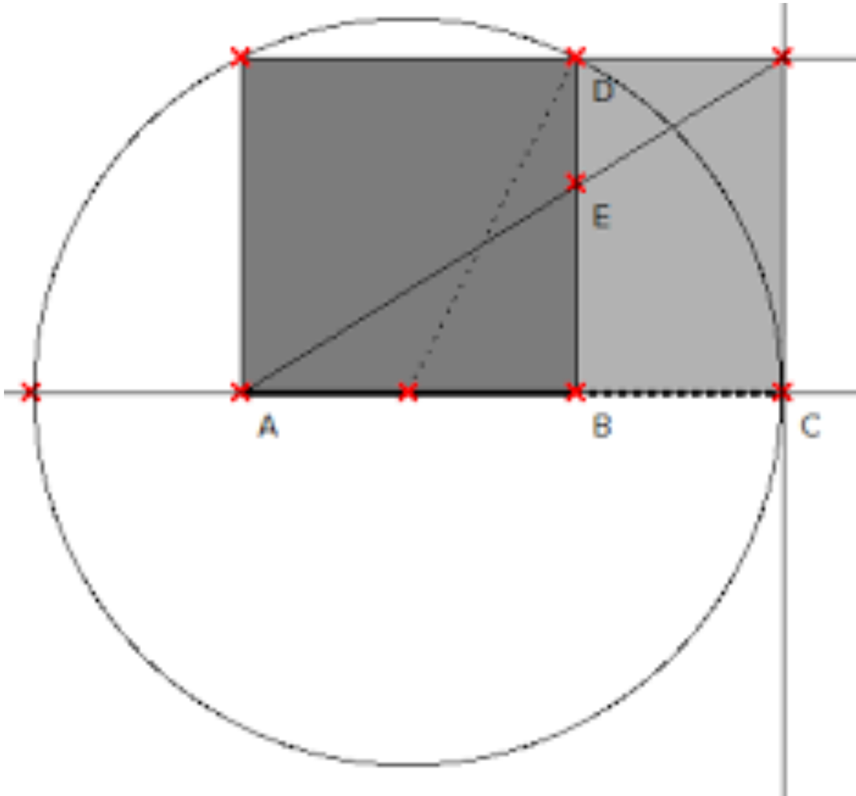


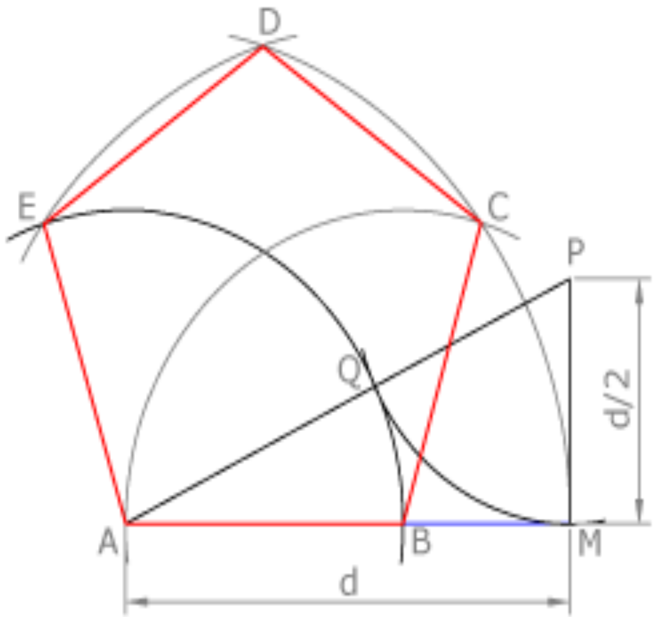
Construcción de polígonos regulares dado el radio

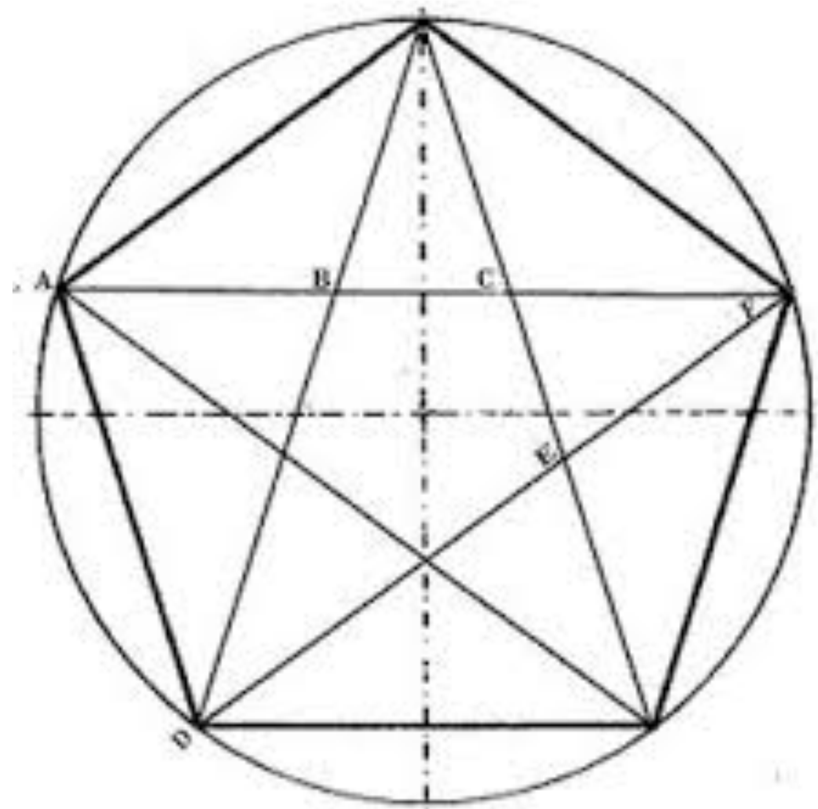

A'
B
C
O
B'
A
C'

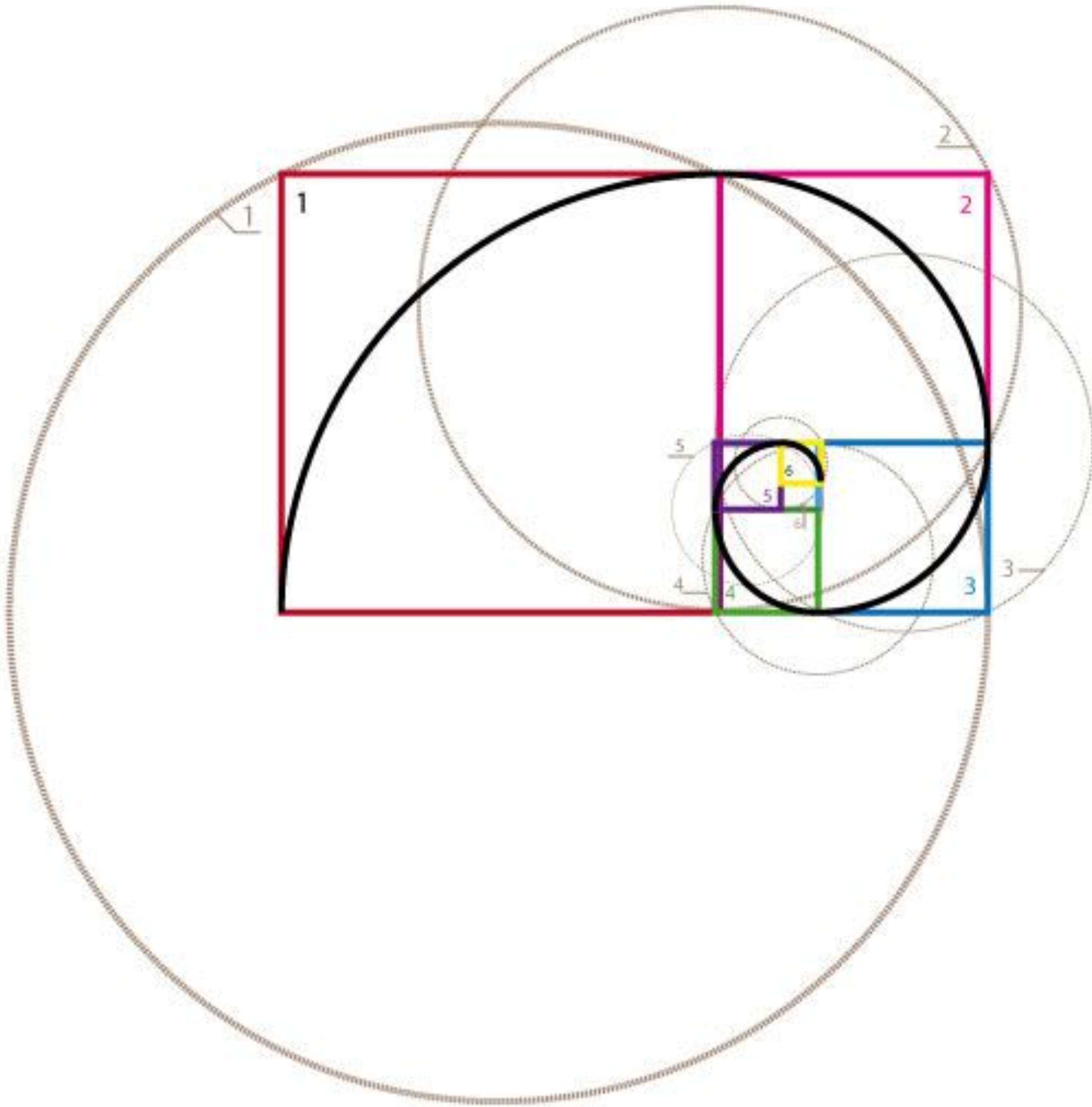

e
C
C'
B
B'
A
A'


B
a
E
A
a
D
b
F

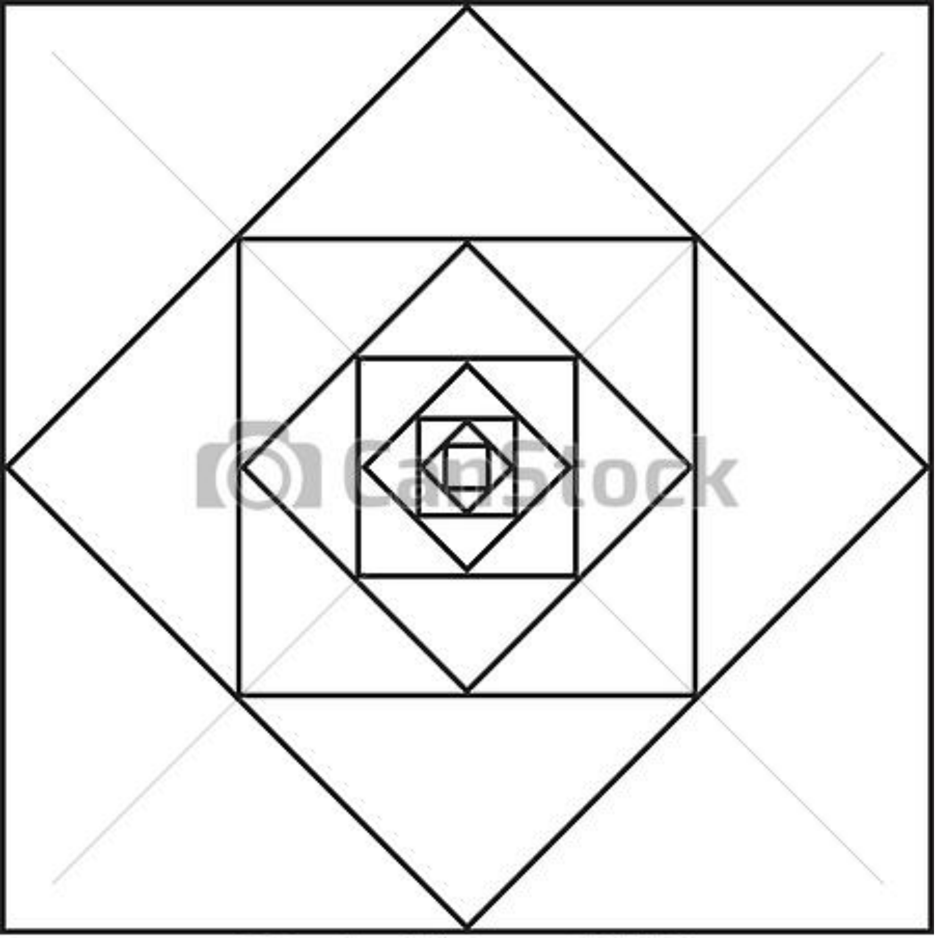

D
E
A
B
C

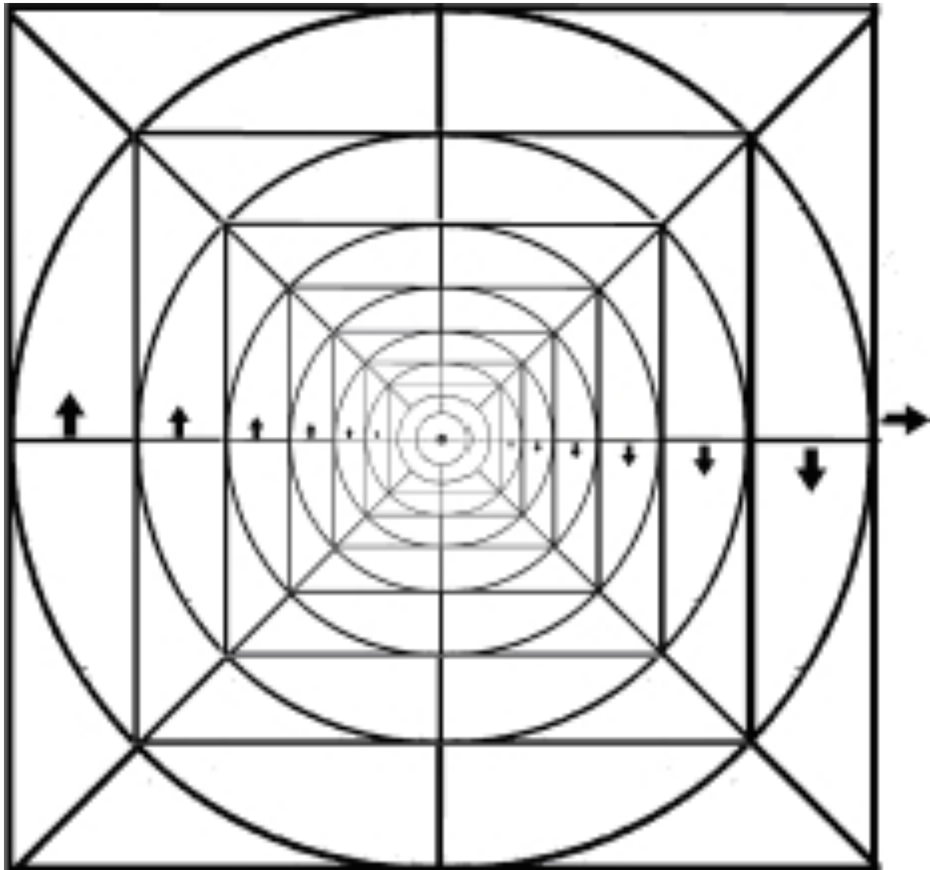

D
E
C
P
Q
d/2
A
B
M
d

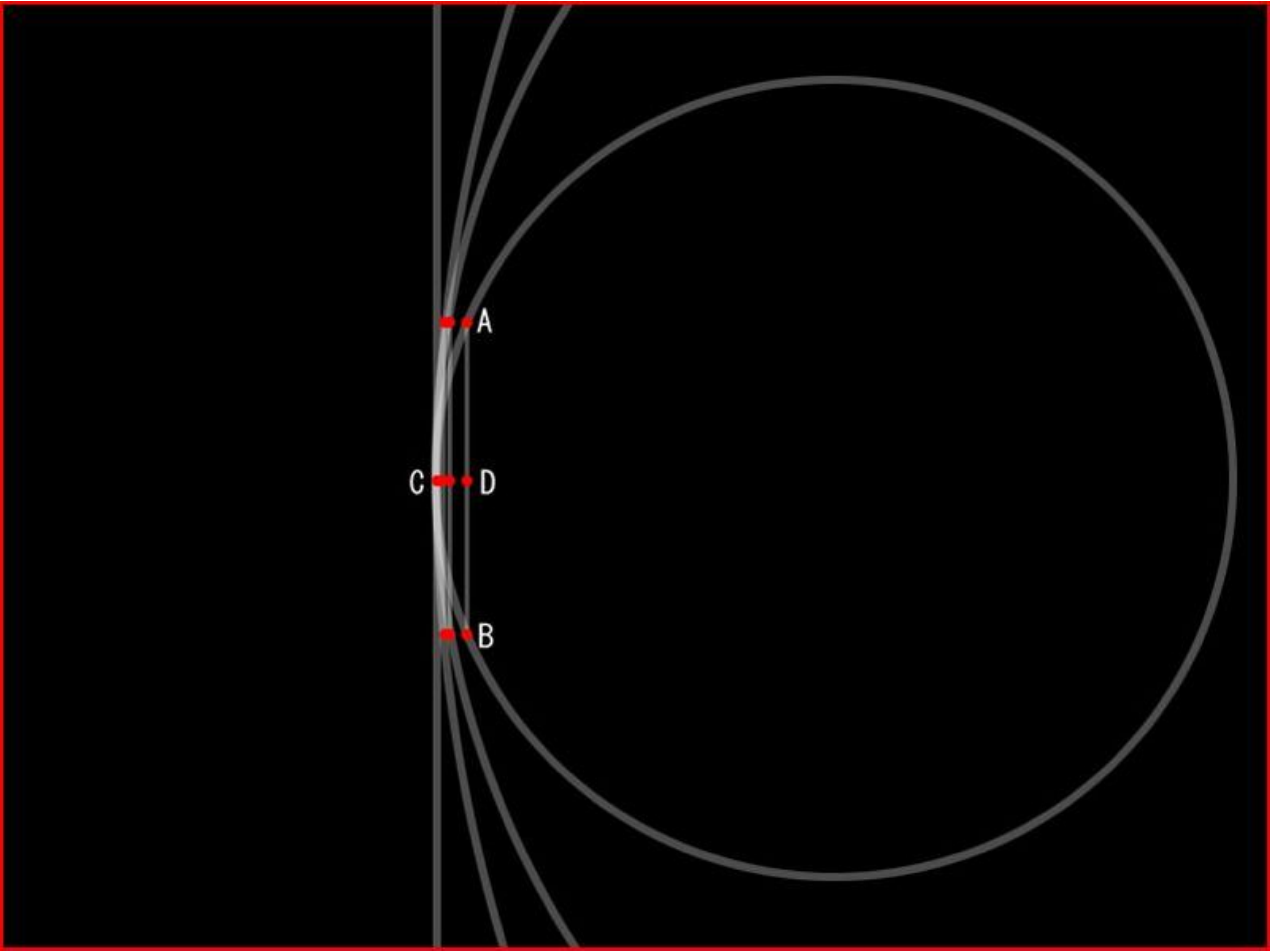

A
B
C
E
D

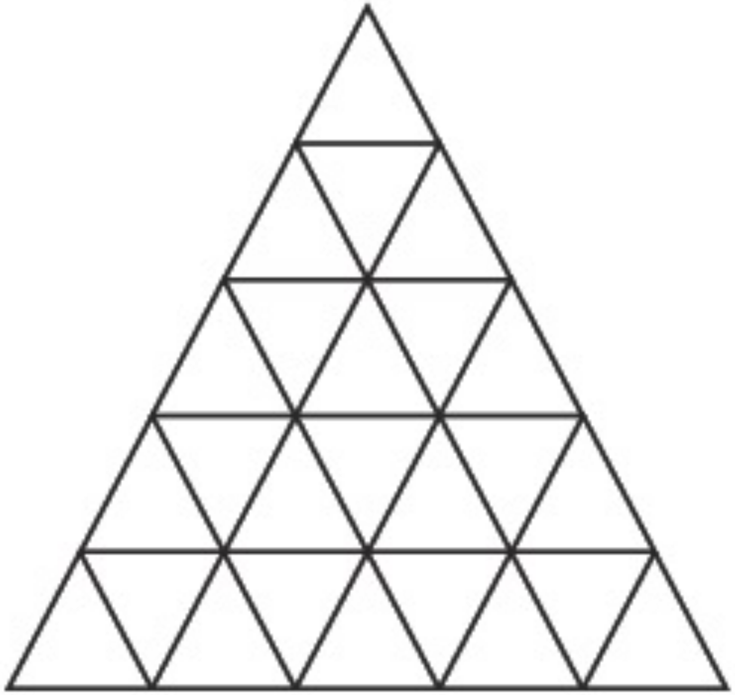


1
2
3
4
5
6

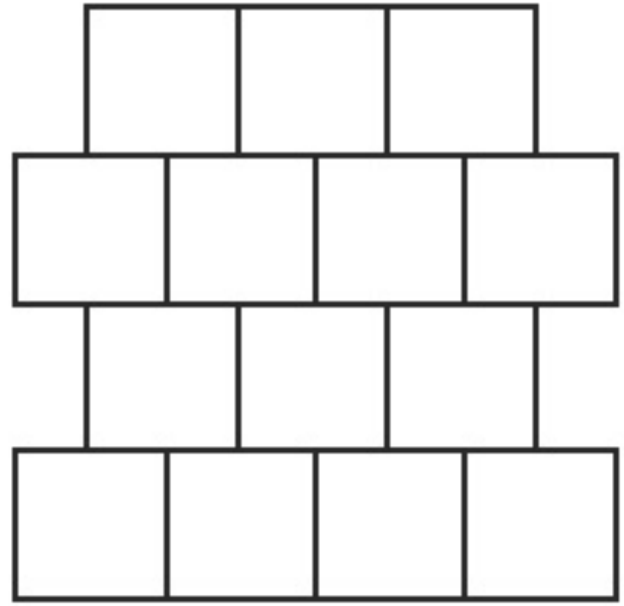





A
C
D
B

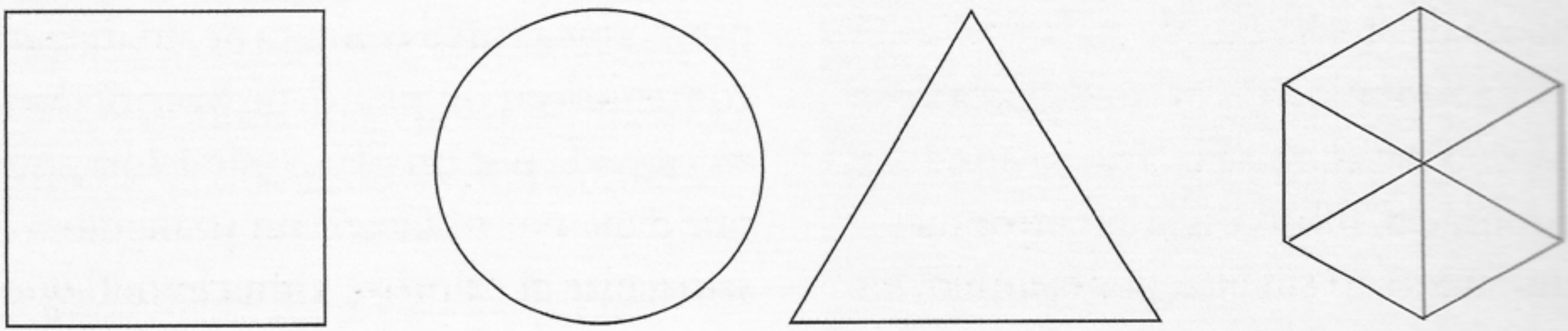


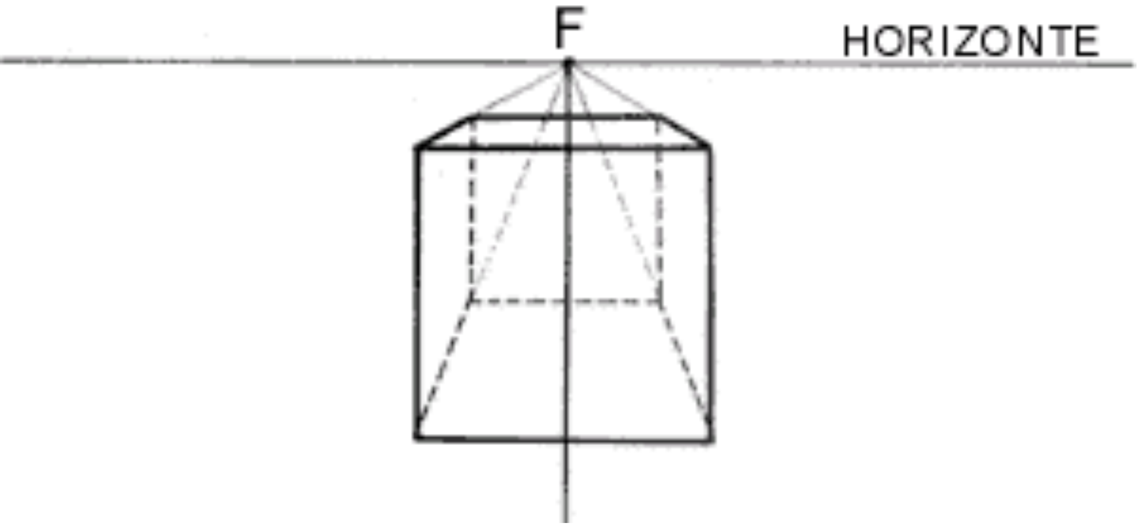
Teselación con triángulos

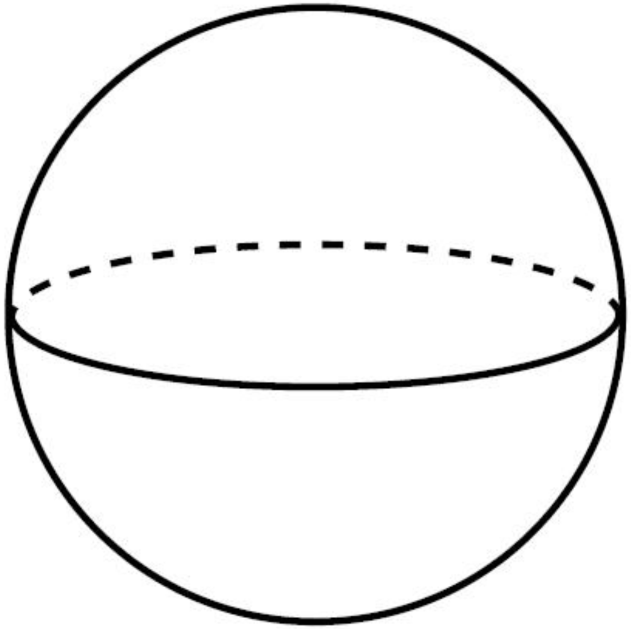


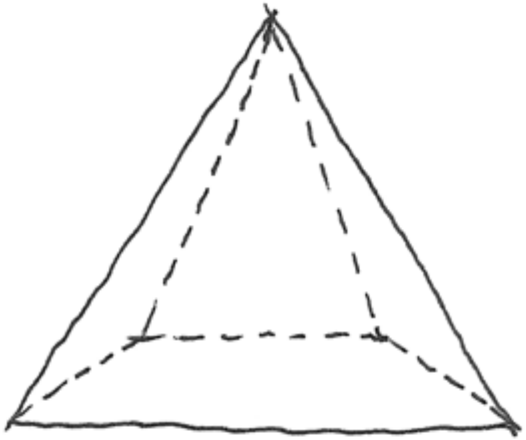
Teselación con cuadrados

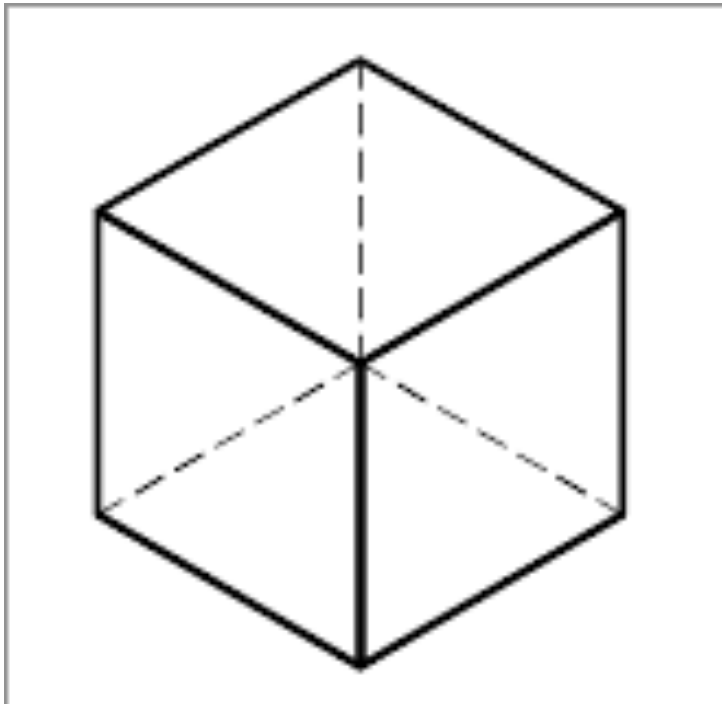
Teselaciones con hexágonos




F
HORIZONTE







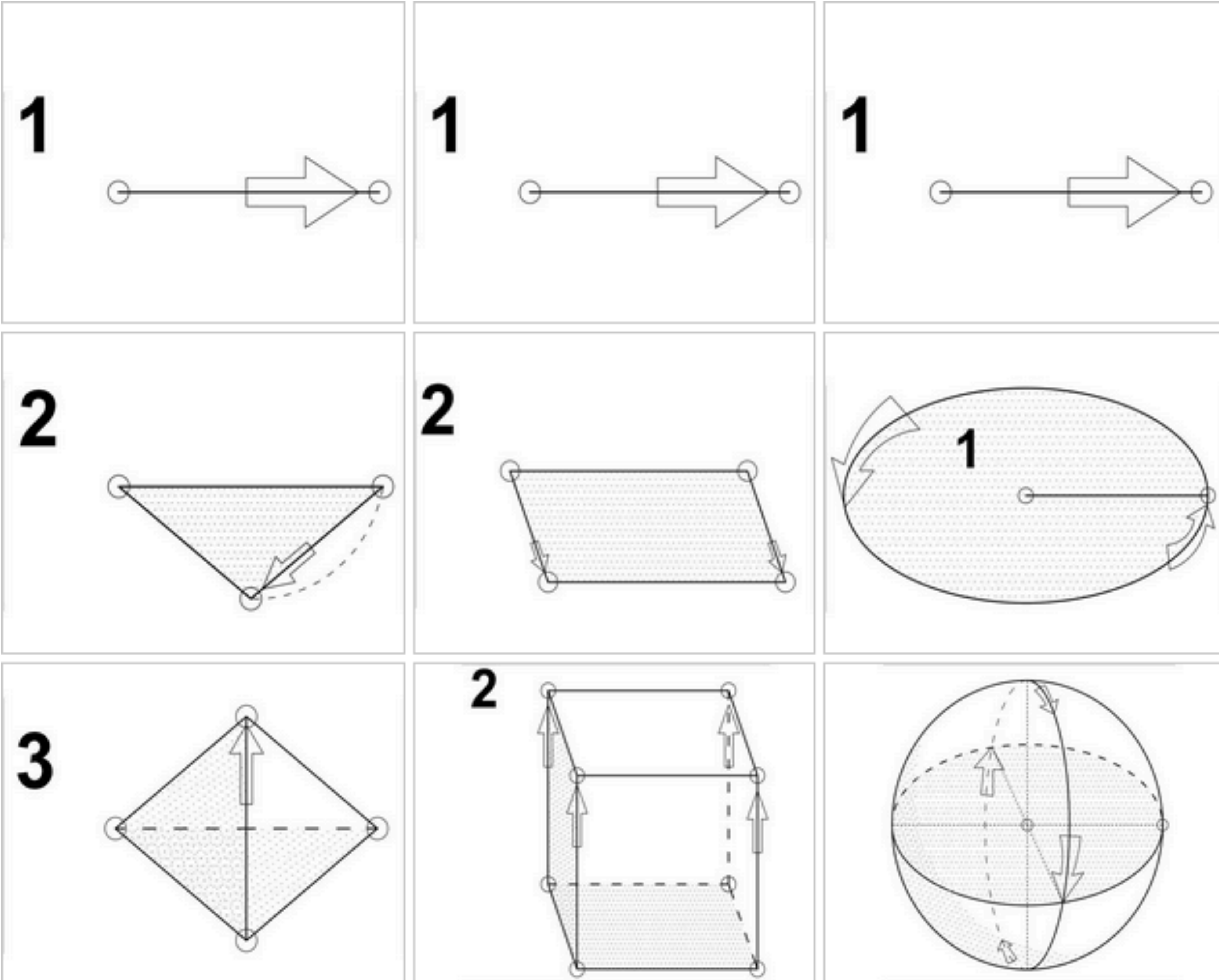
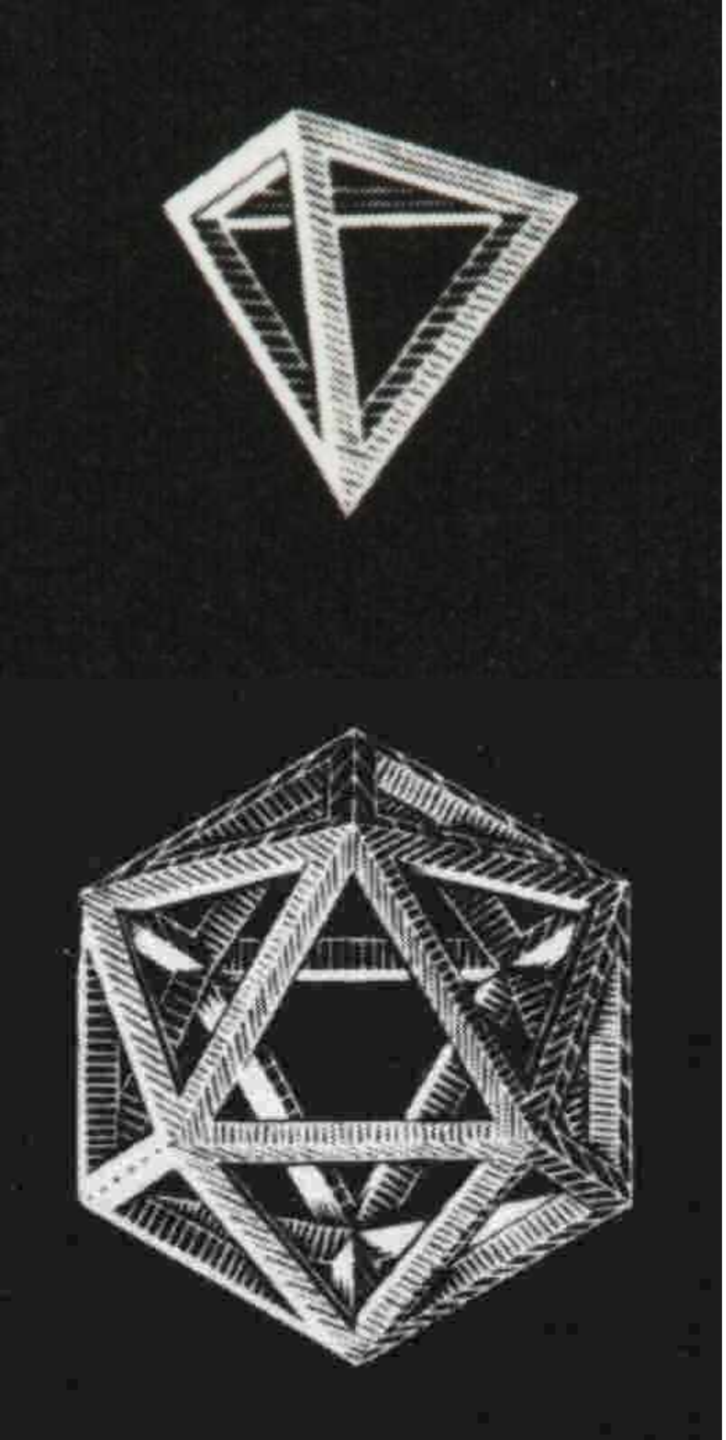
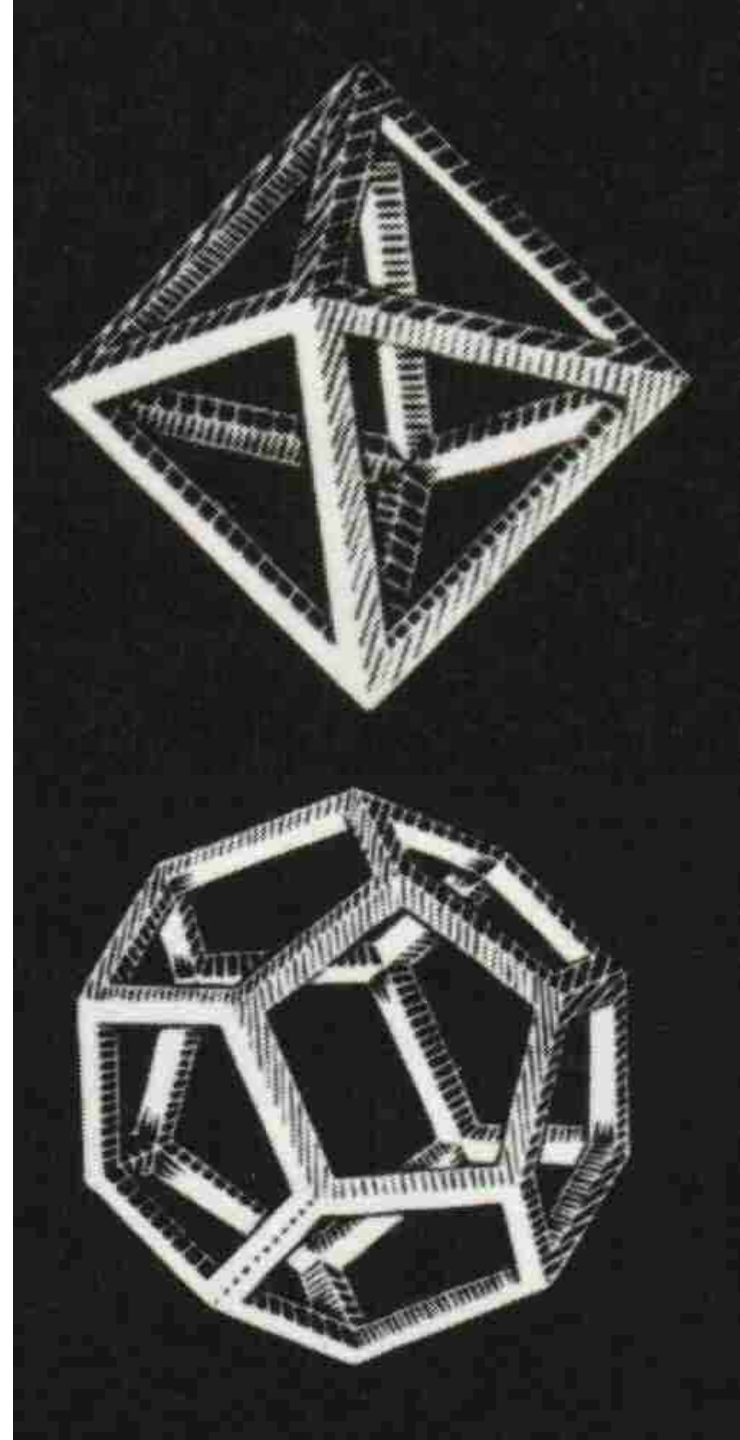
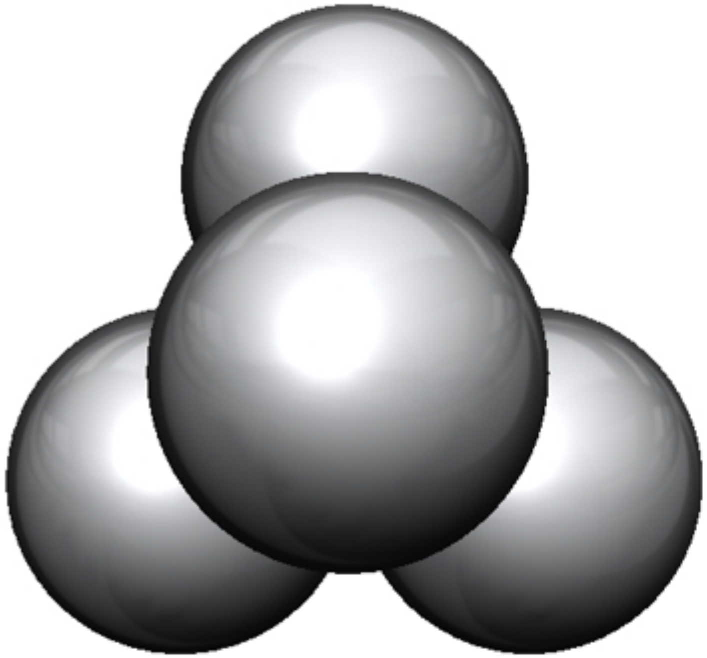
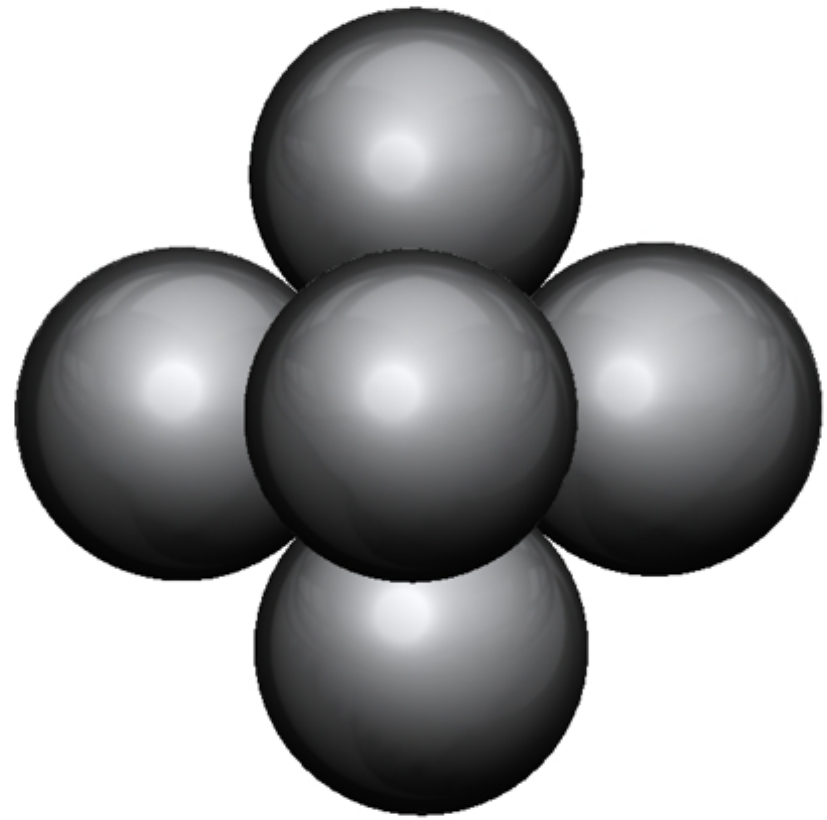

1
1
1
2
2
1
3
2

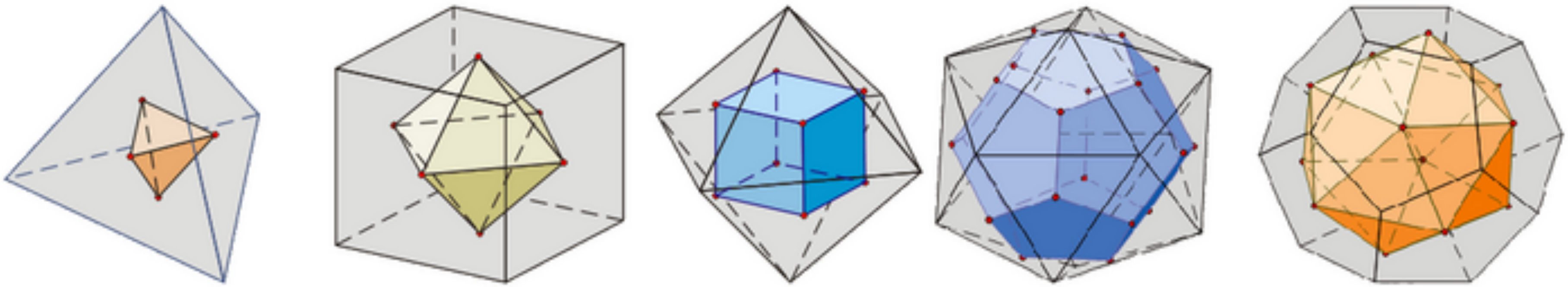
Figura 2: Modelos Neolíticos dos Sólidos Platônicos.

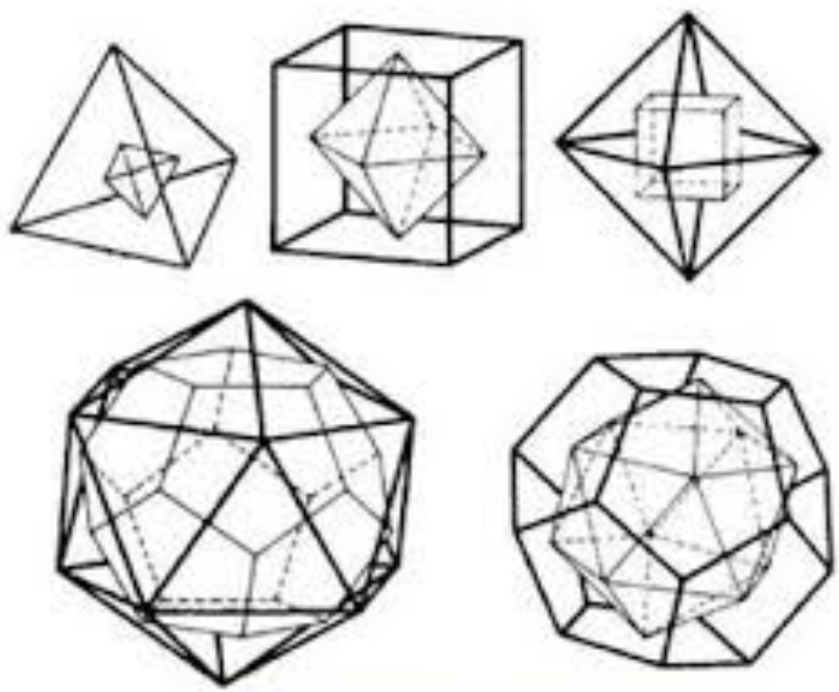




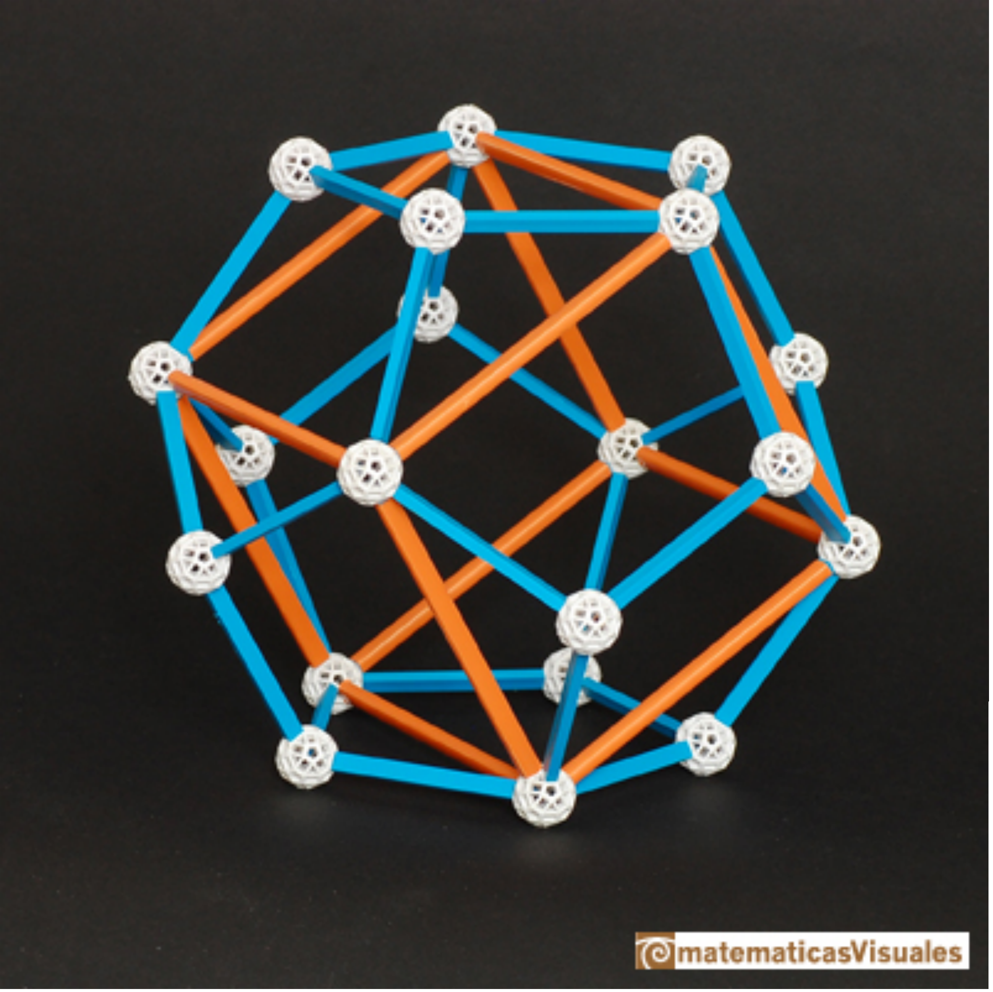


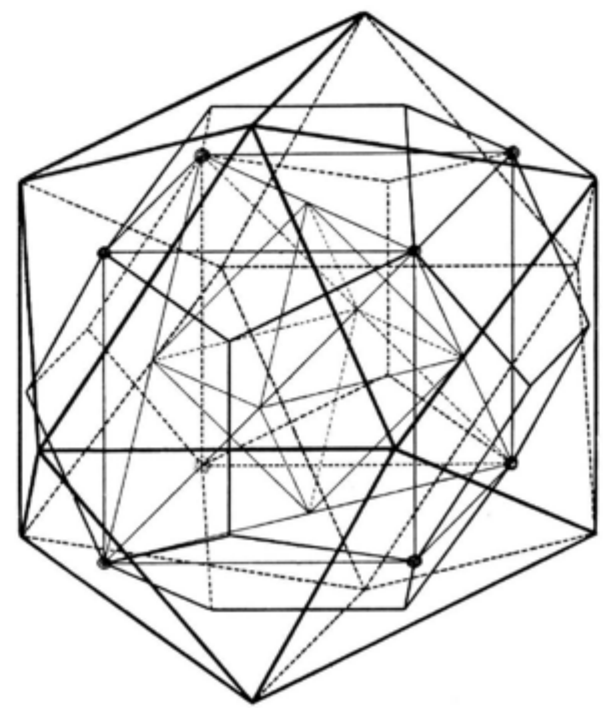


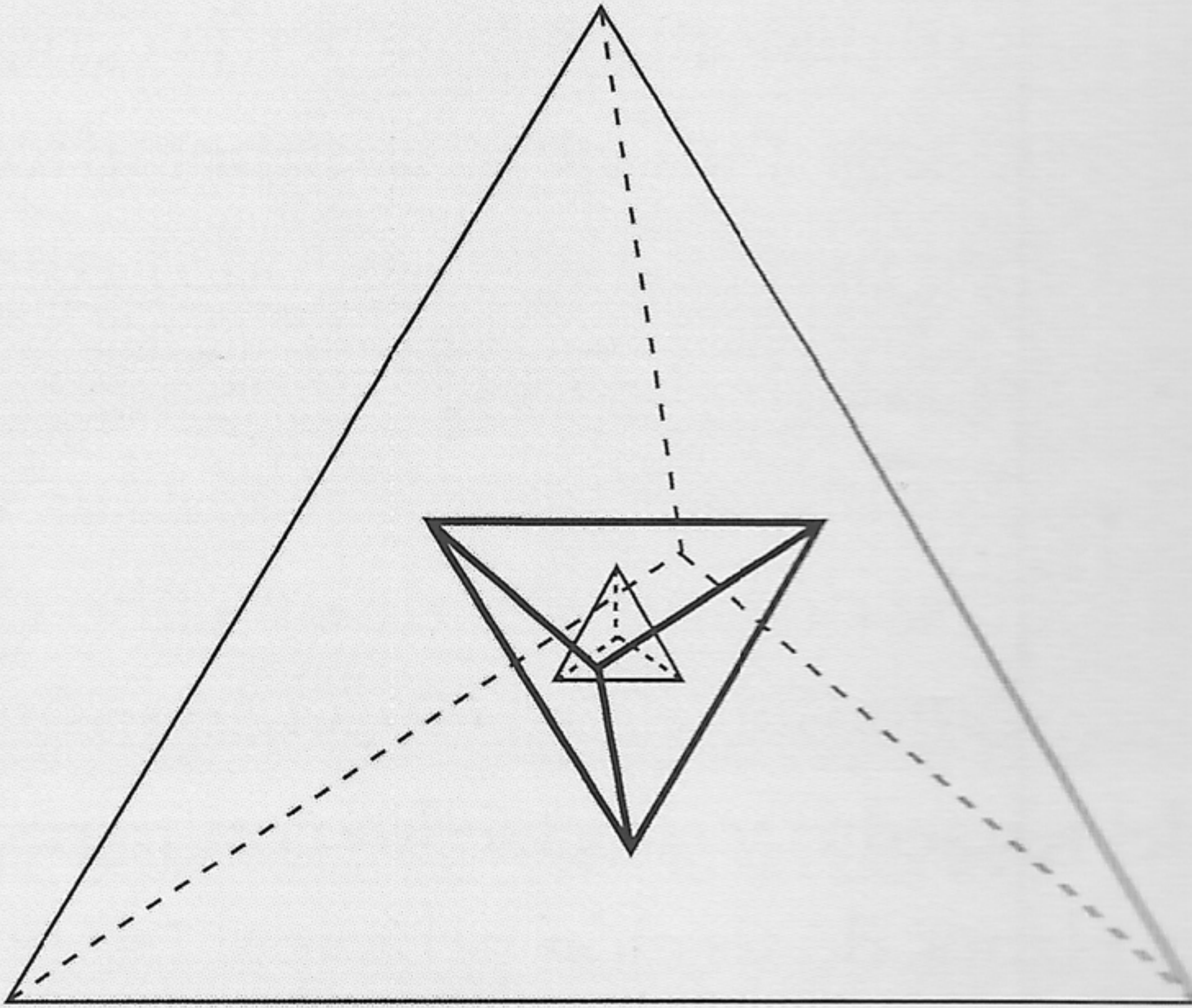


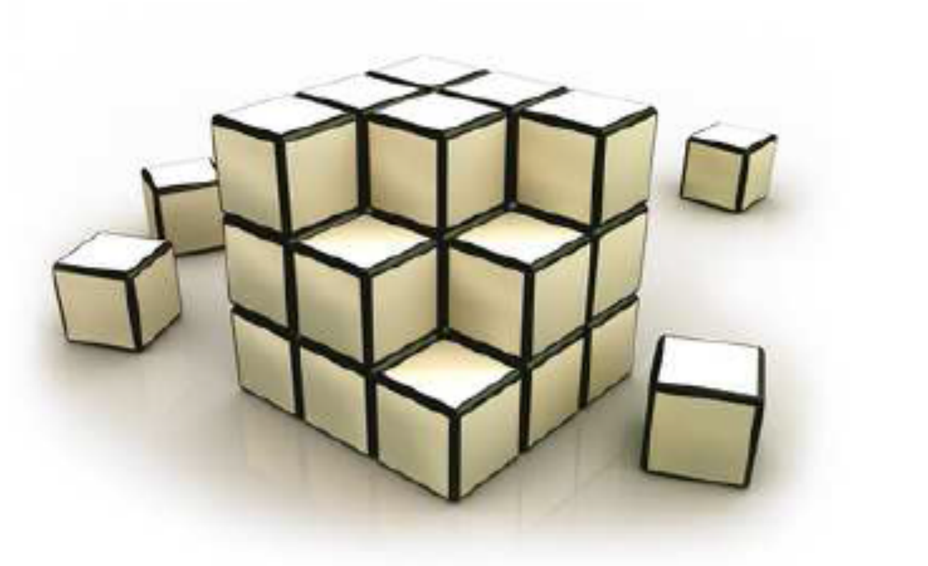


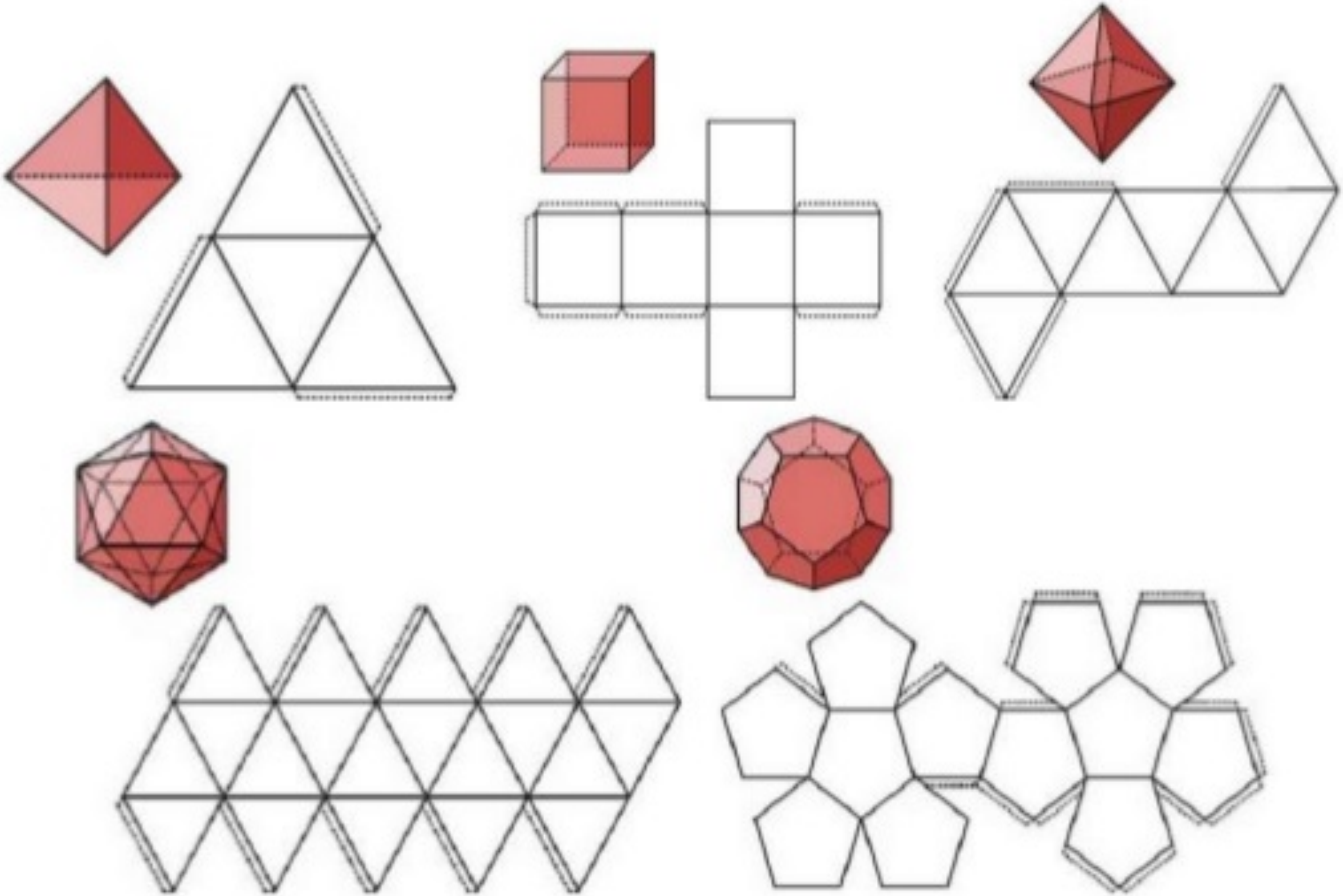
La dualidad de los sólidos platónicos


matematicasVisuales

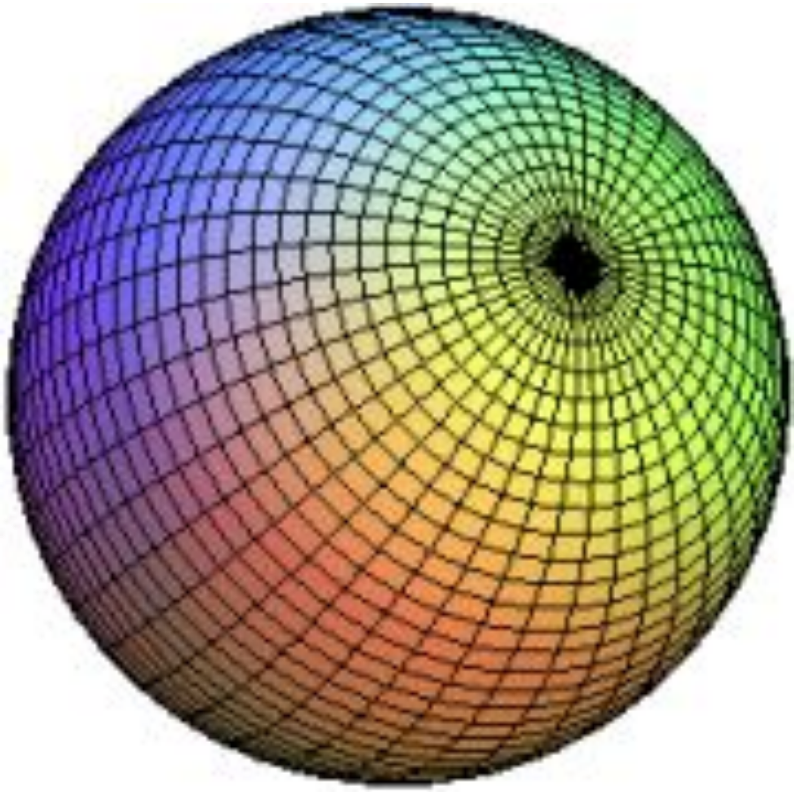


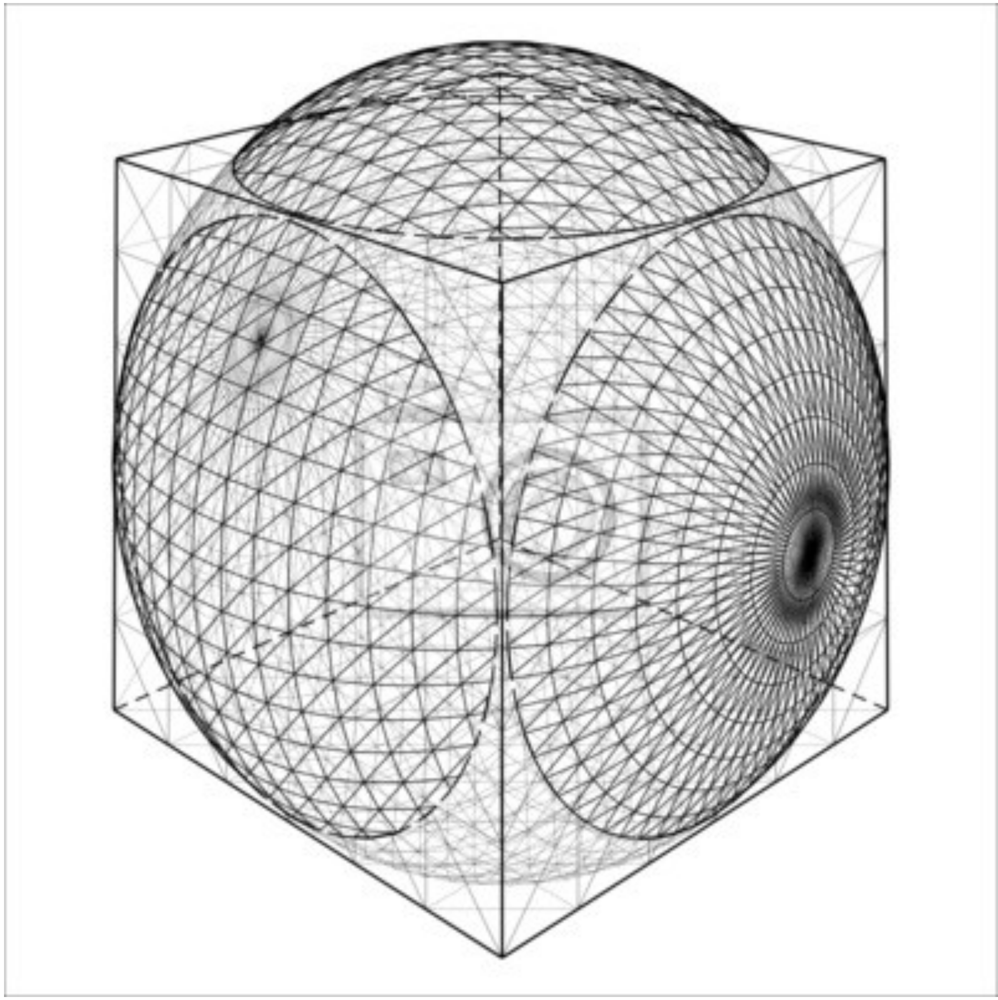


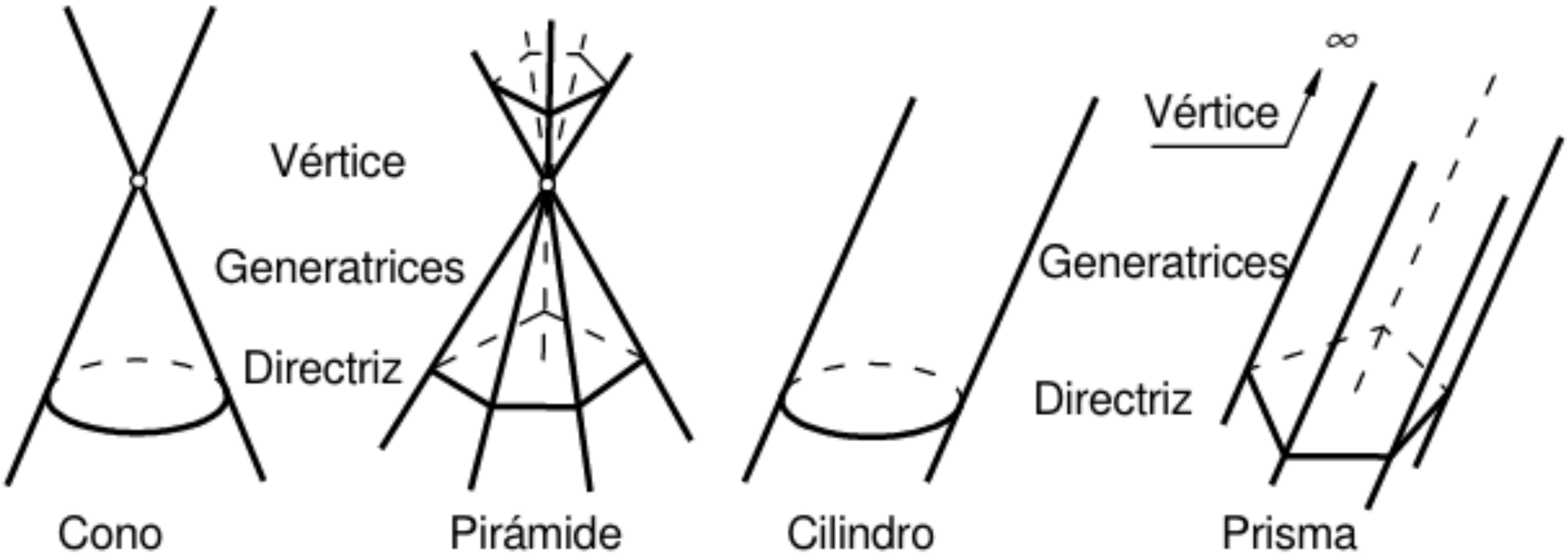


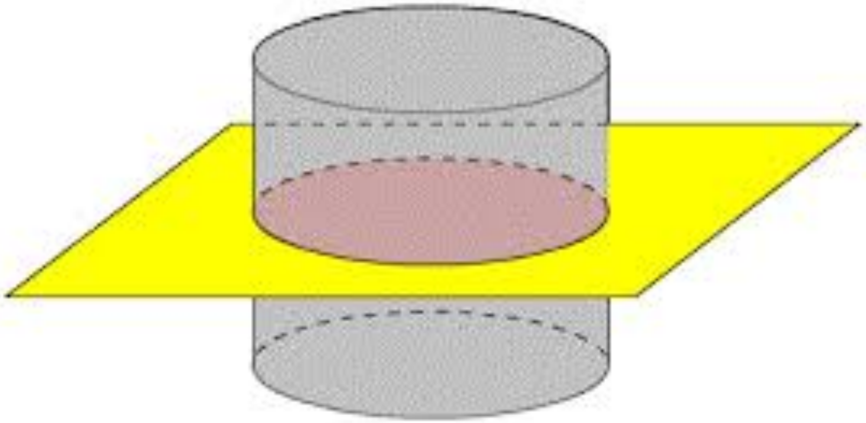


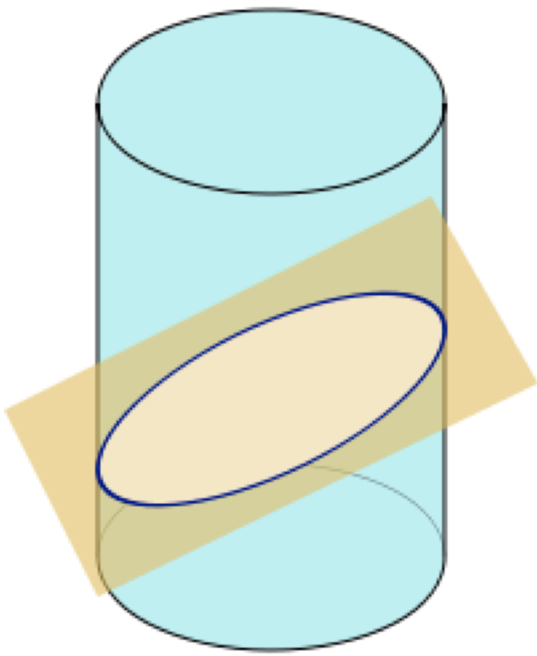


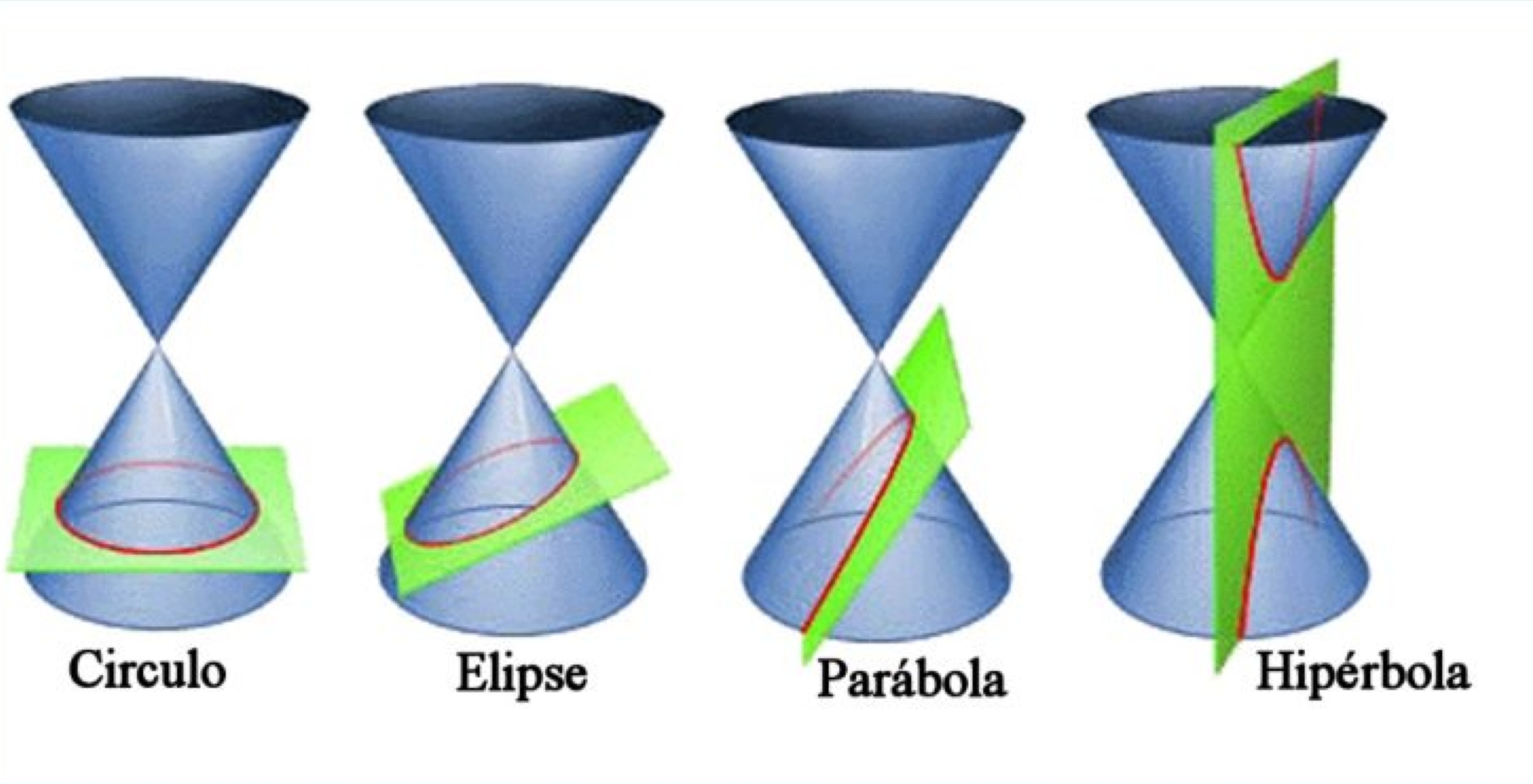



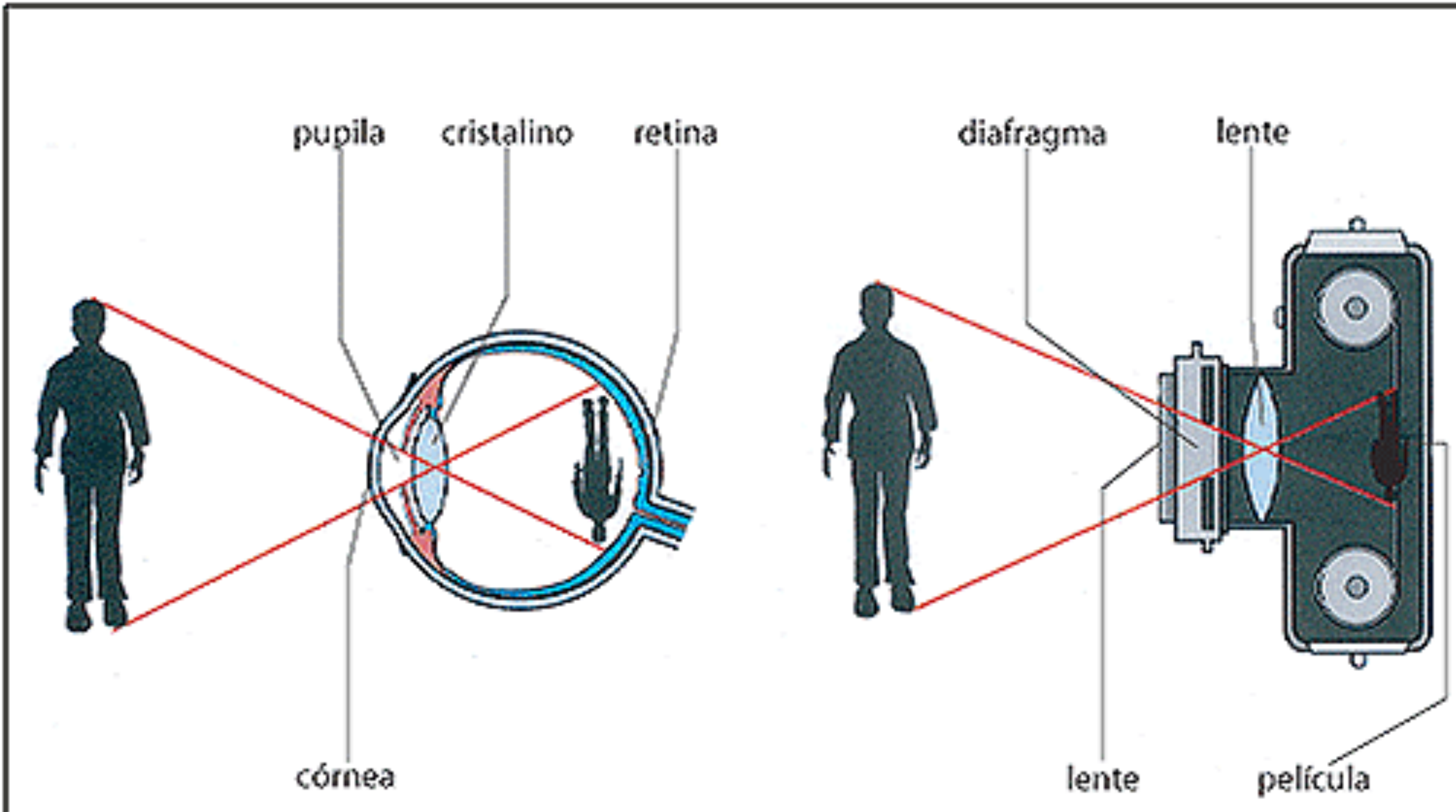


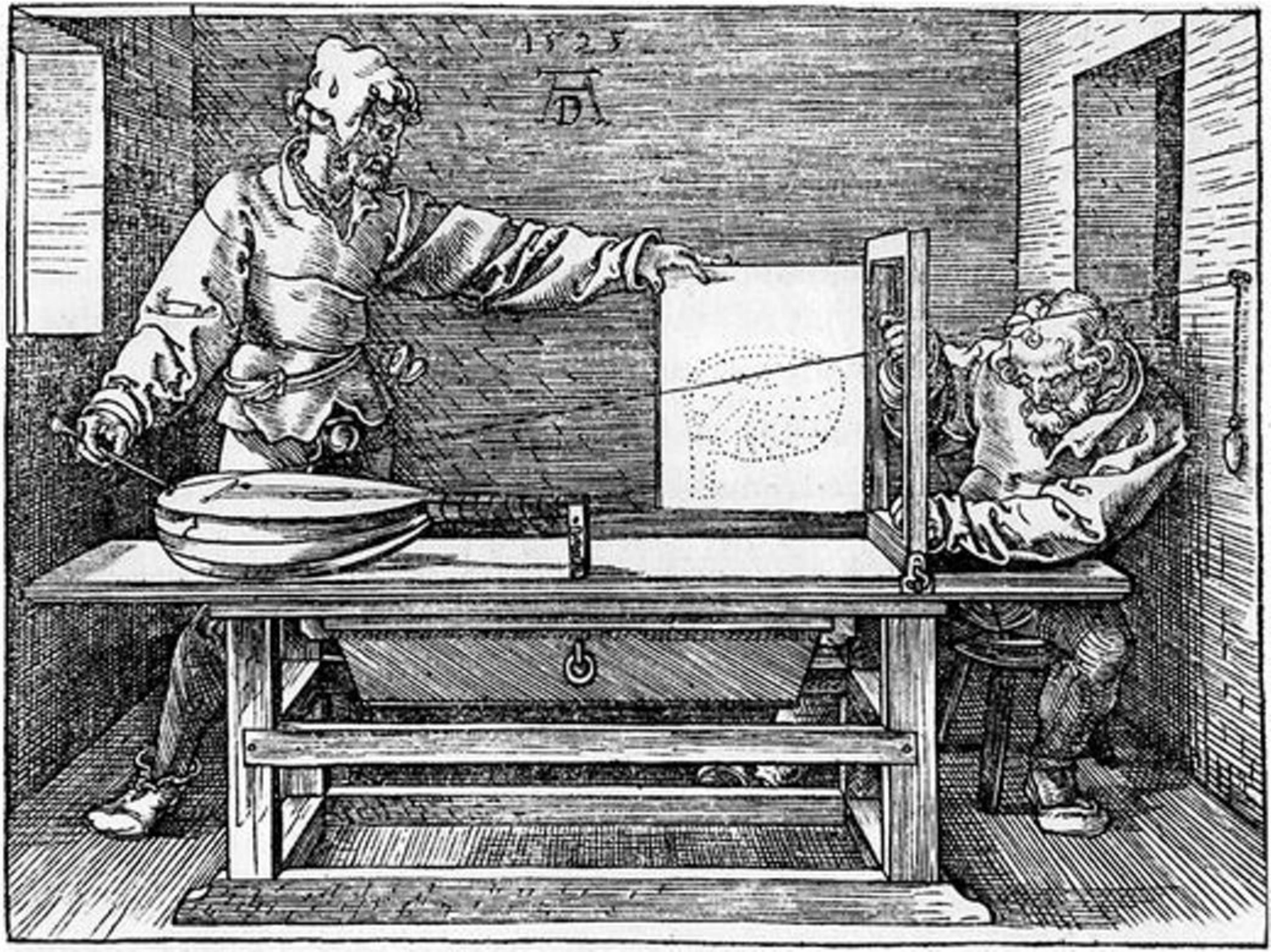

Vértice
Generatrices
Directriz
Cono
Pirámide
Cilindro
∞
Vértice
Generatrices
Directriz
Prisma

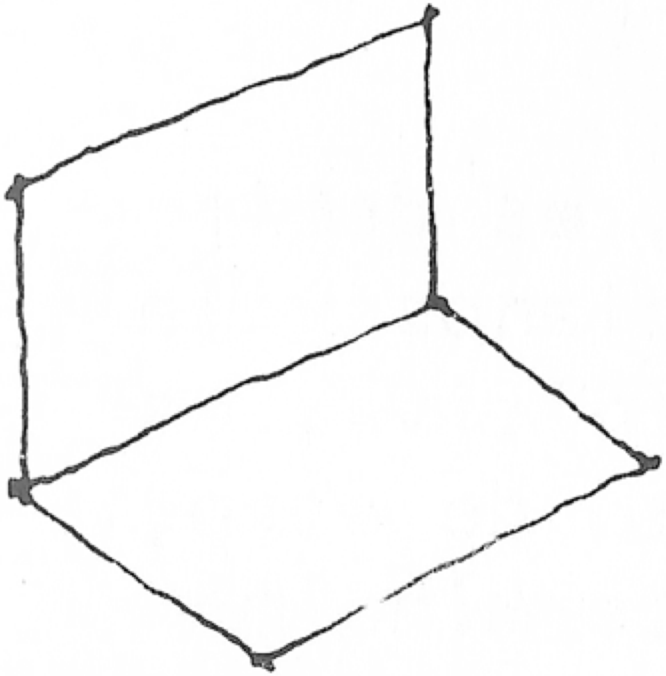


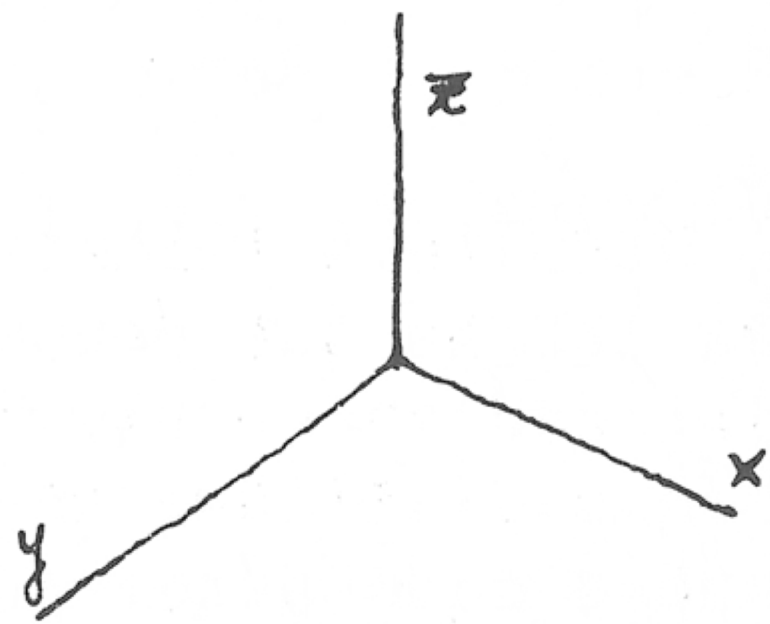



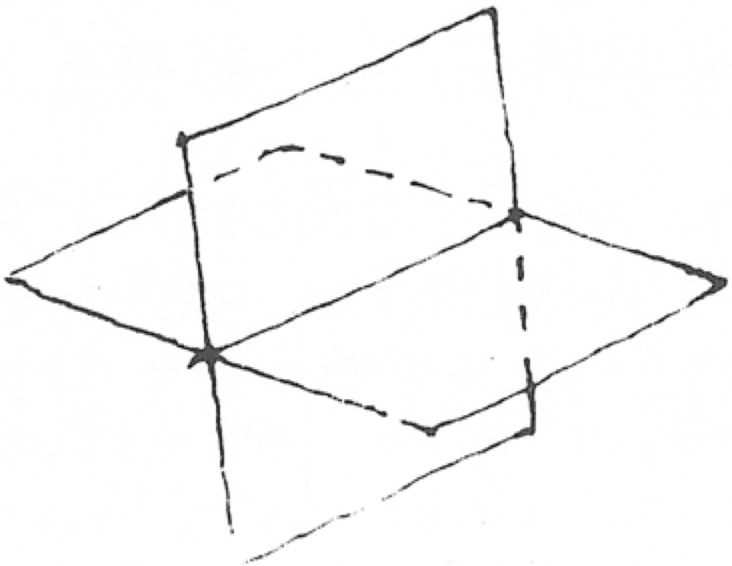

Circulo
Elipse
Parábola
Hipérbola

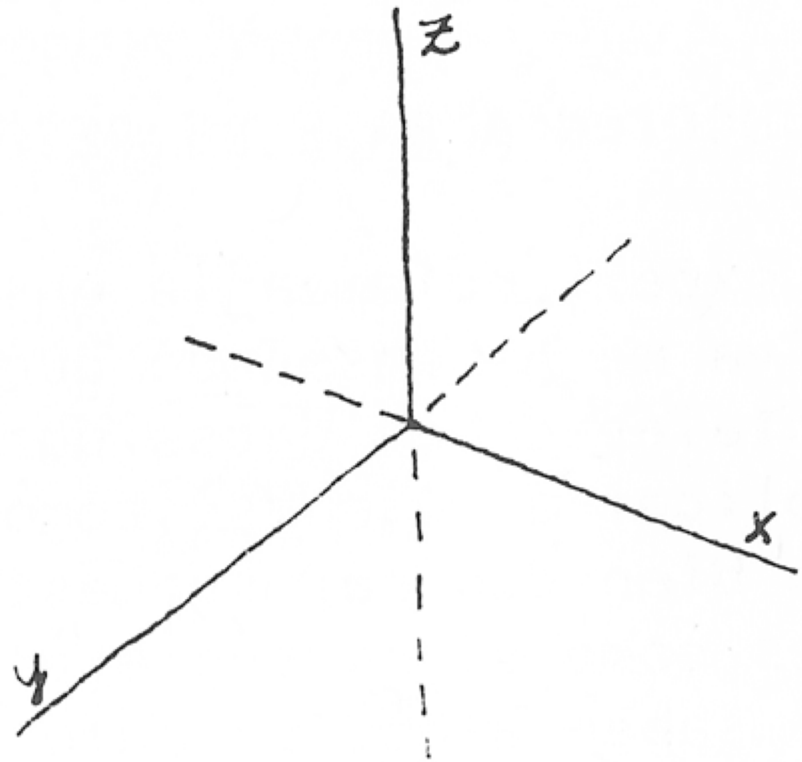

pupila
cristalino
retina
córnea
diafragma
lente
lente
película

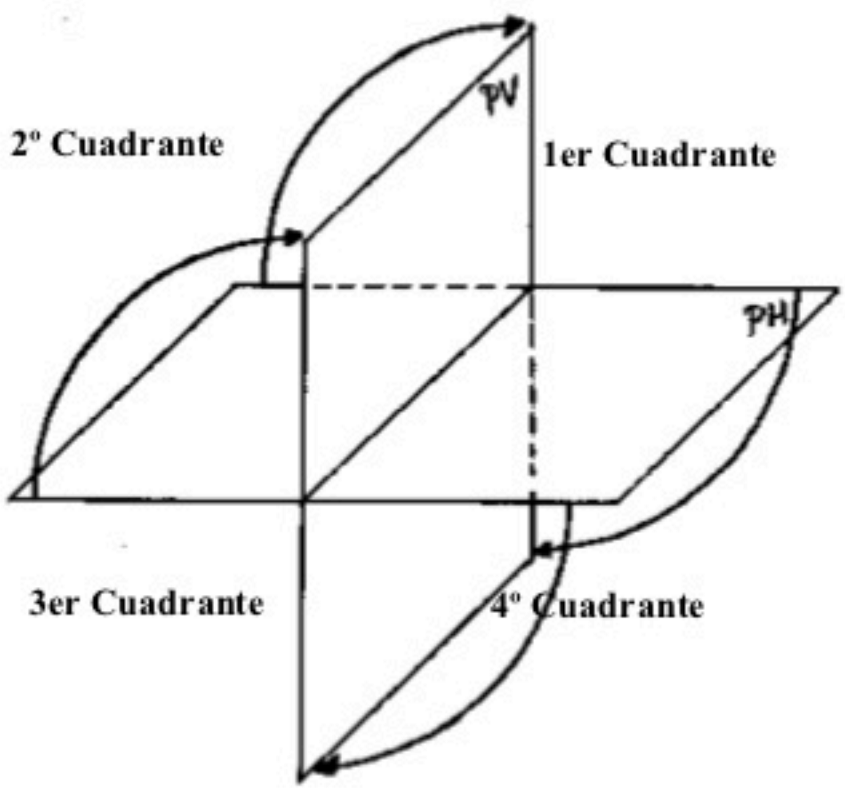

1525

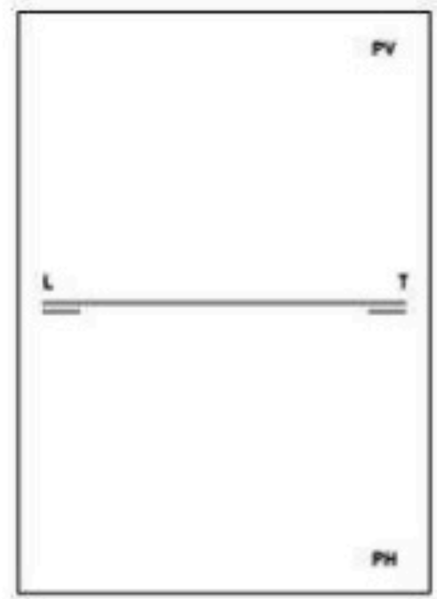


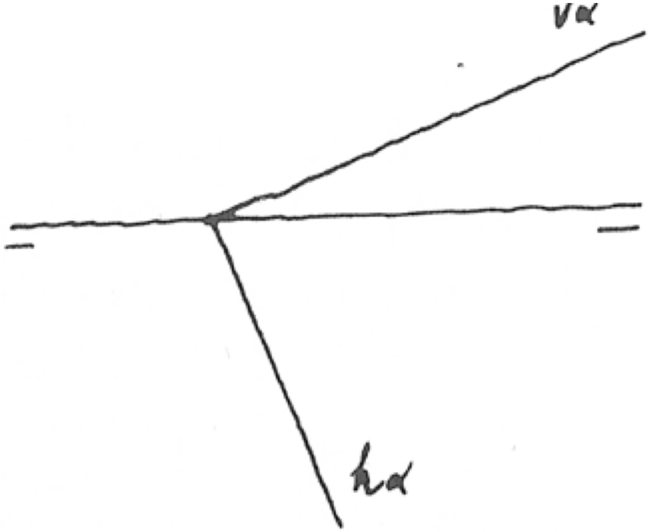

z
x
y



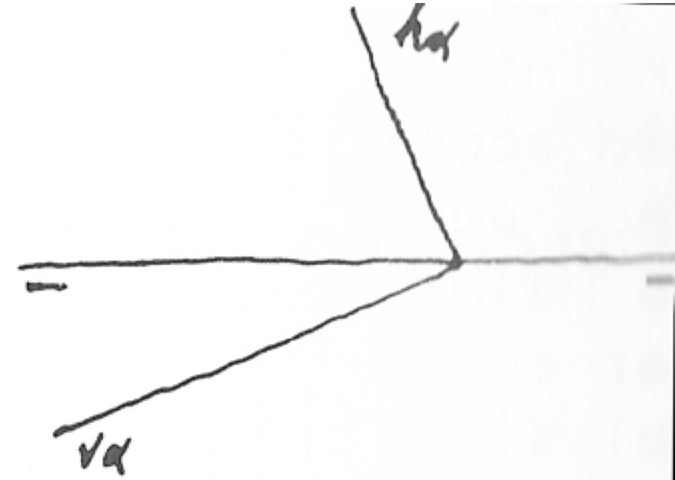

z
x
y

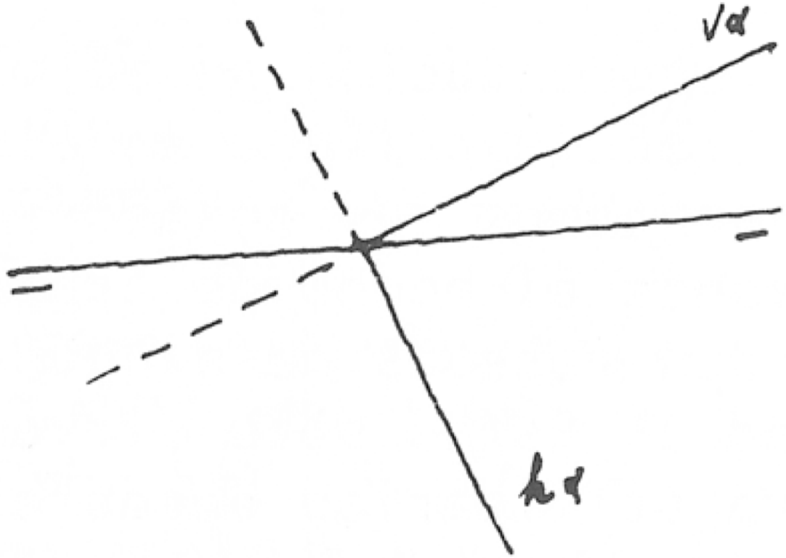

PV
2º Cuadrante
1er Cuadrante
PH
3er Cuadrante
4º Cuadrante


PV
L
T
PH

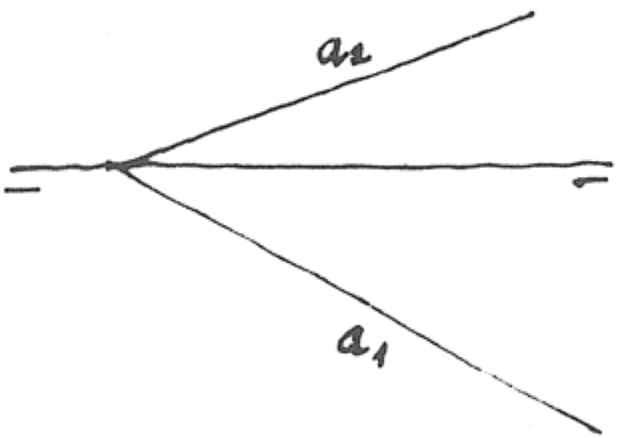


y

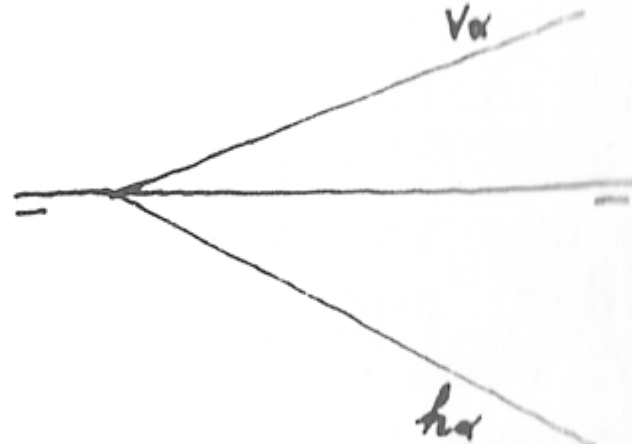


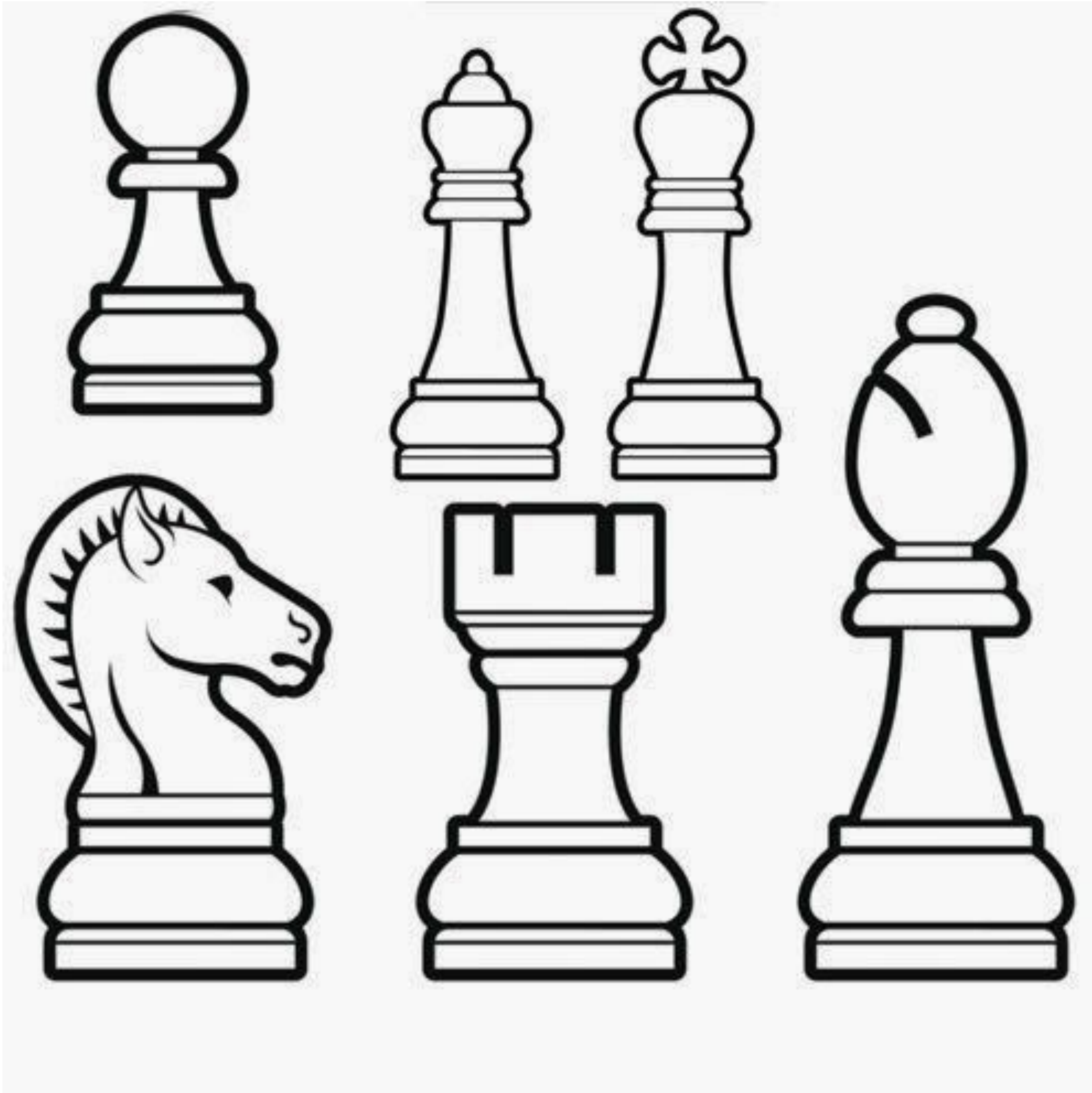


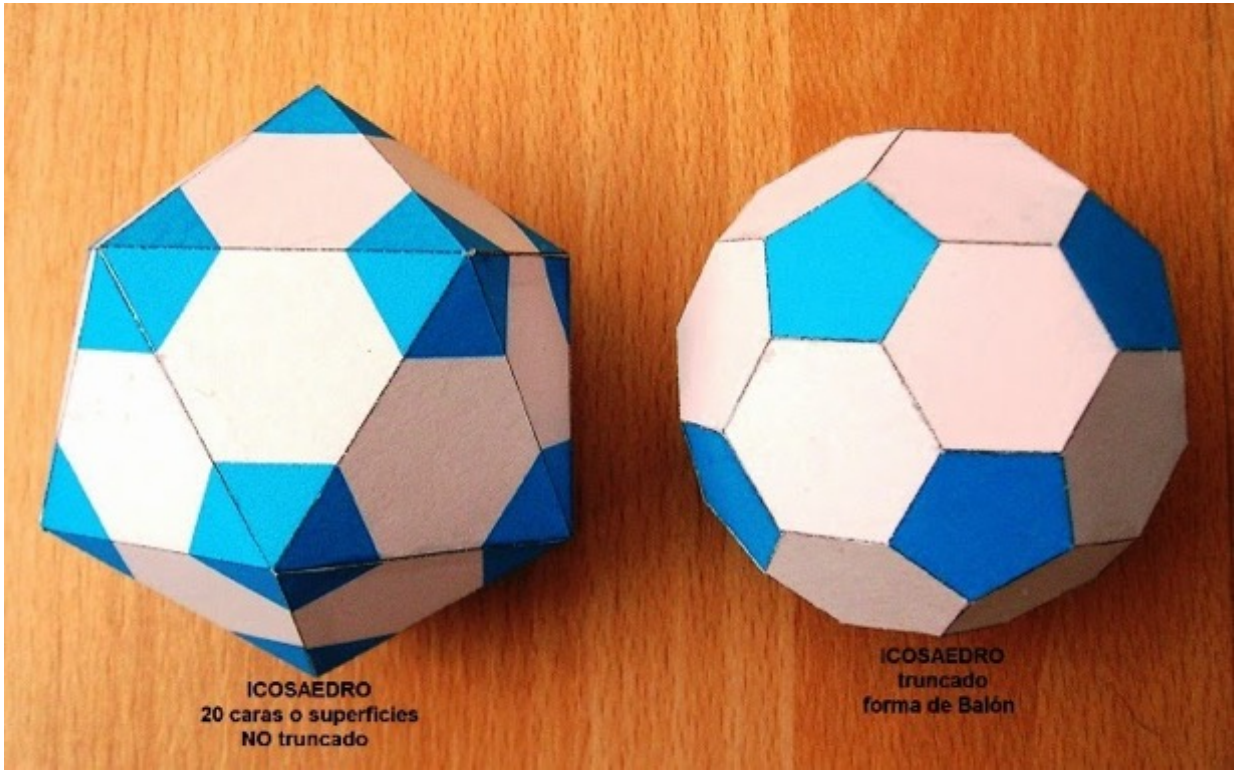
recta a

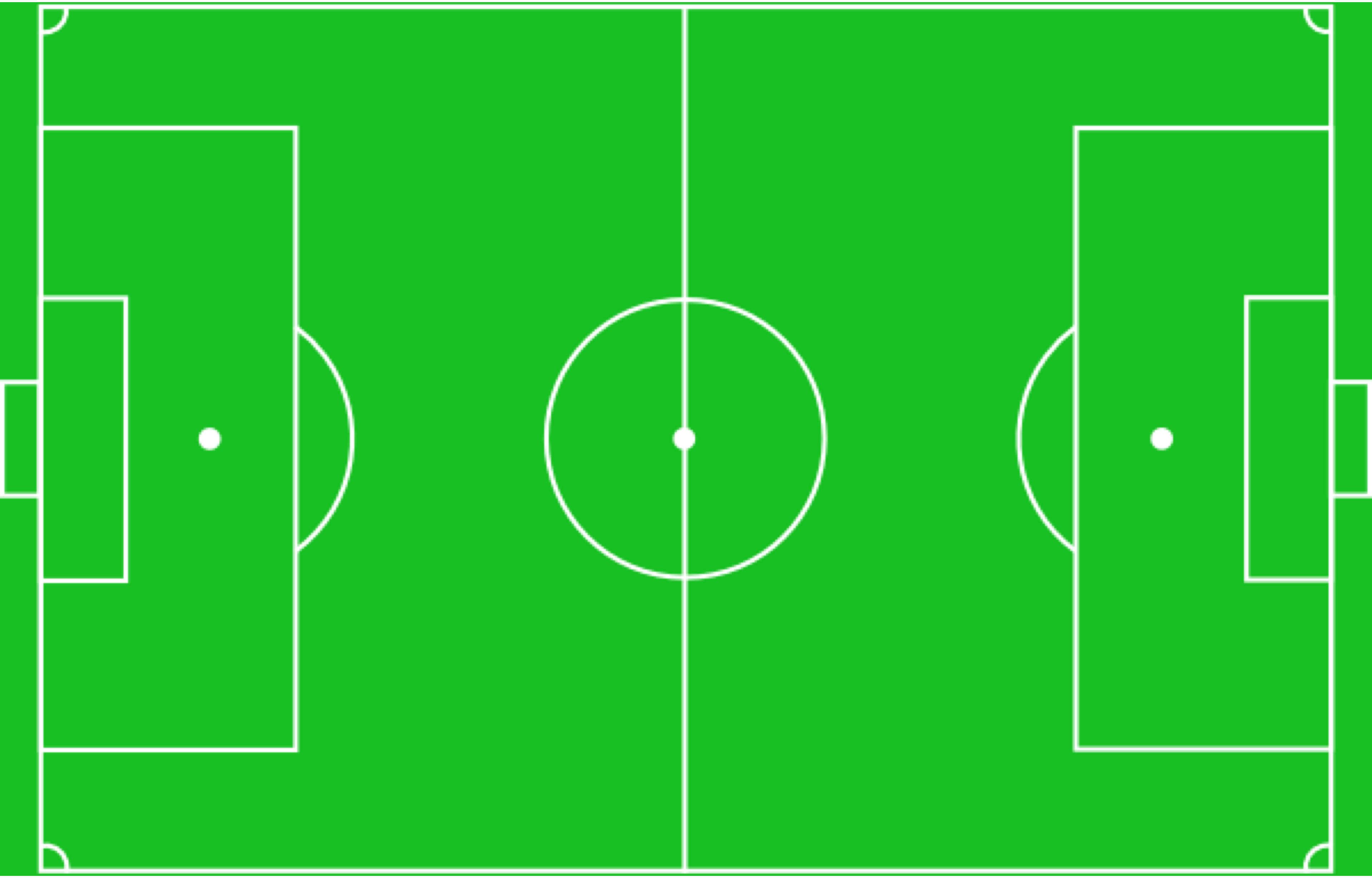


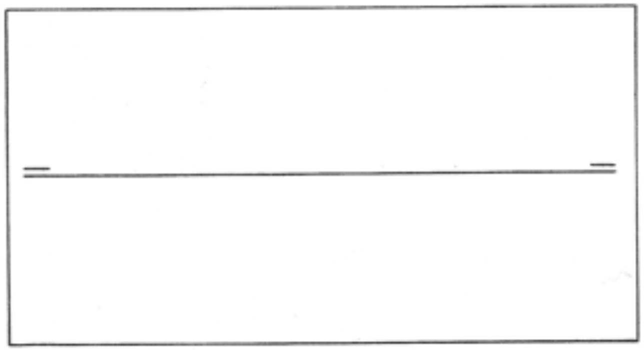
plano α

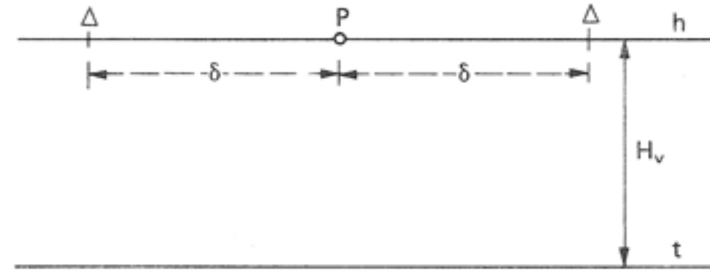


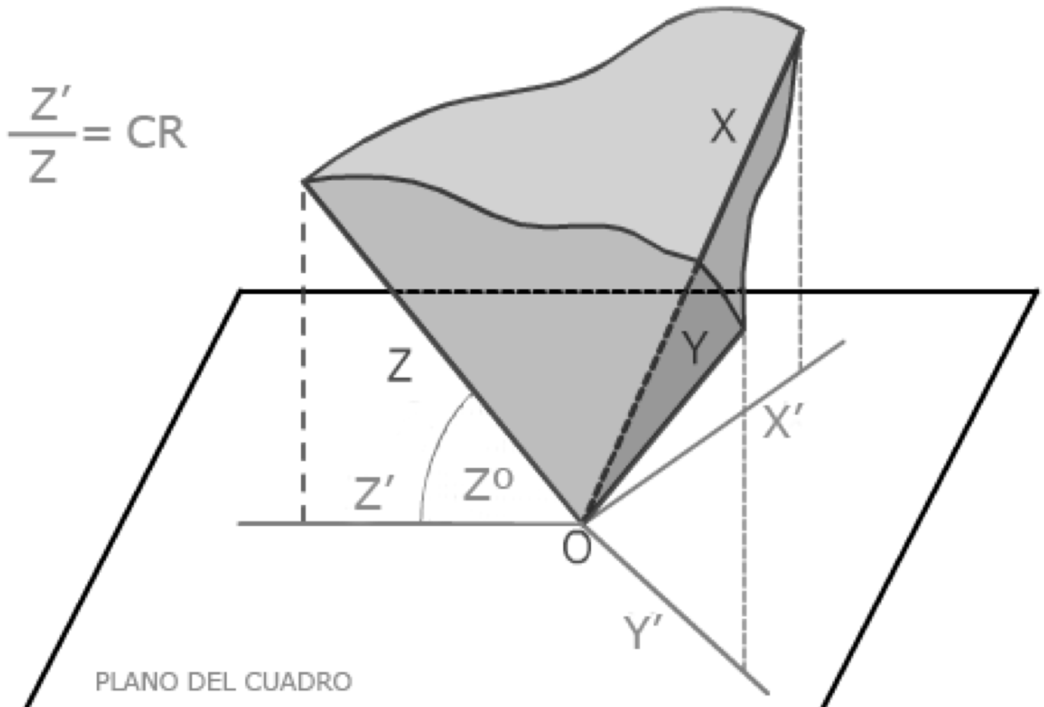


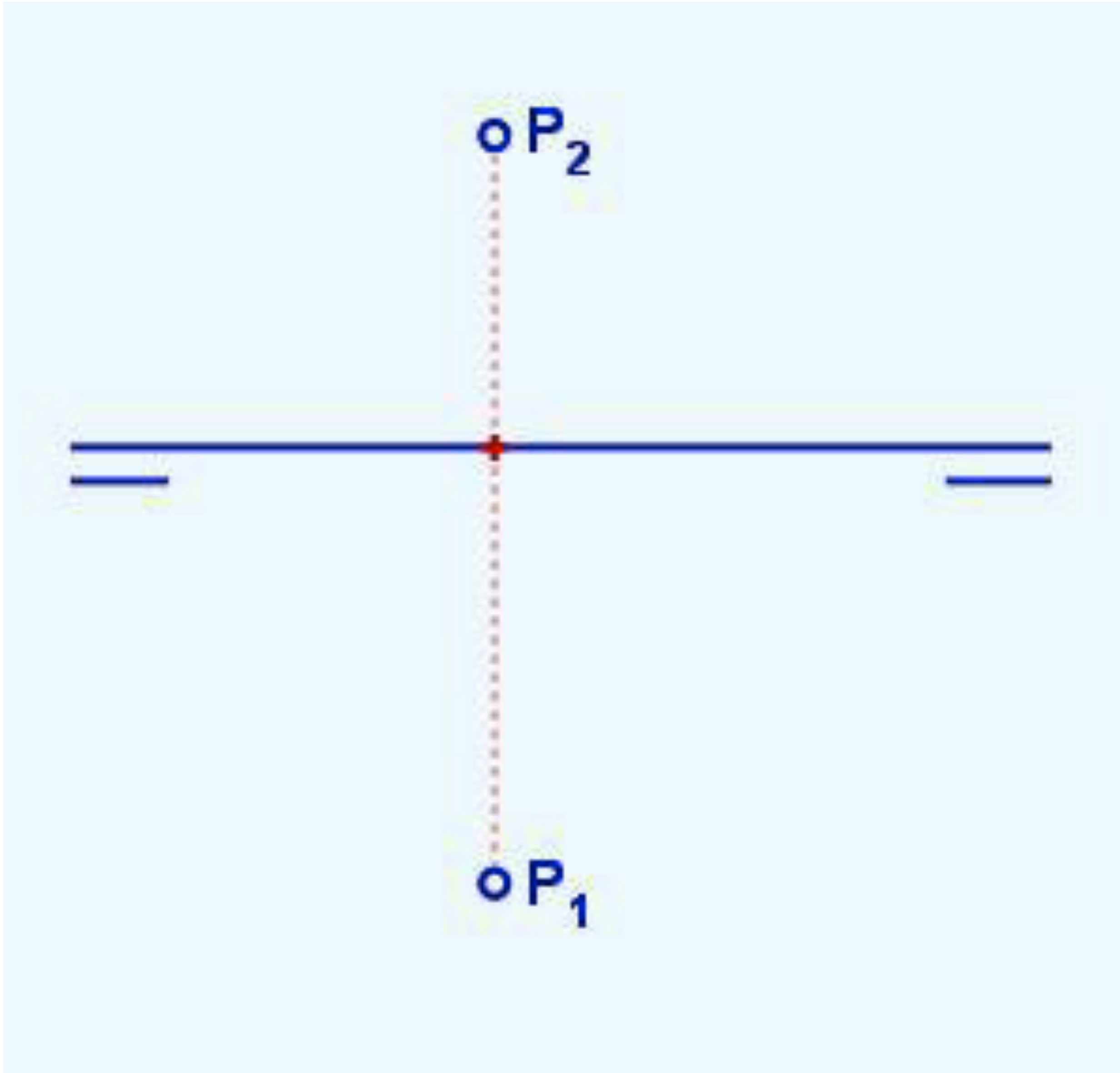

ICOSAEDRO
20 caras o superficies
NO truncado
ICOSAEDRO
truncado
forma de Balón

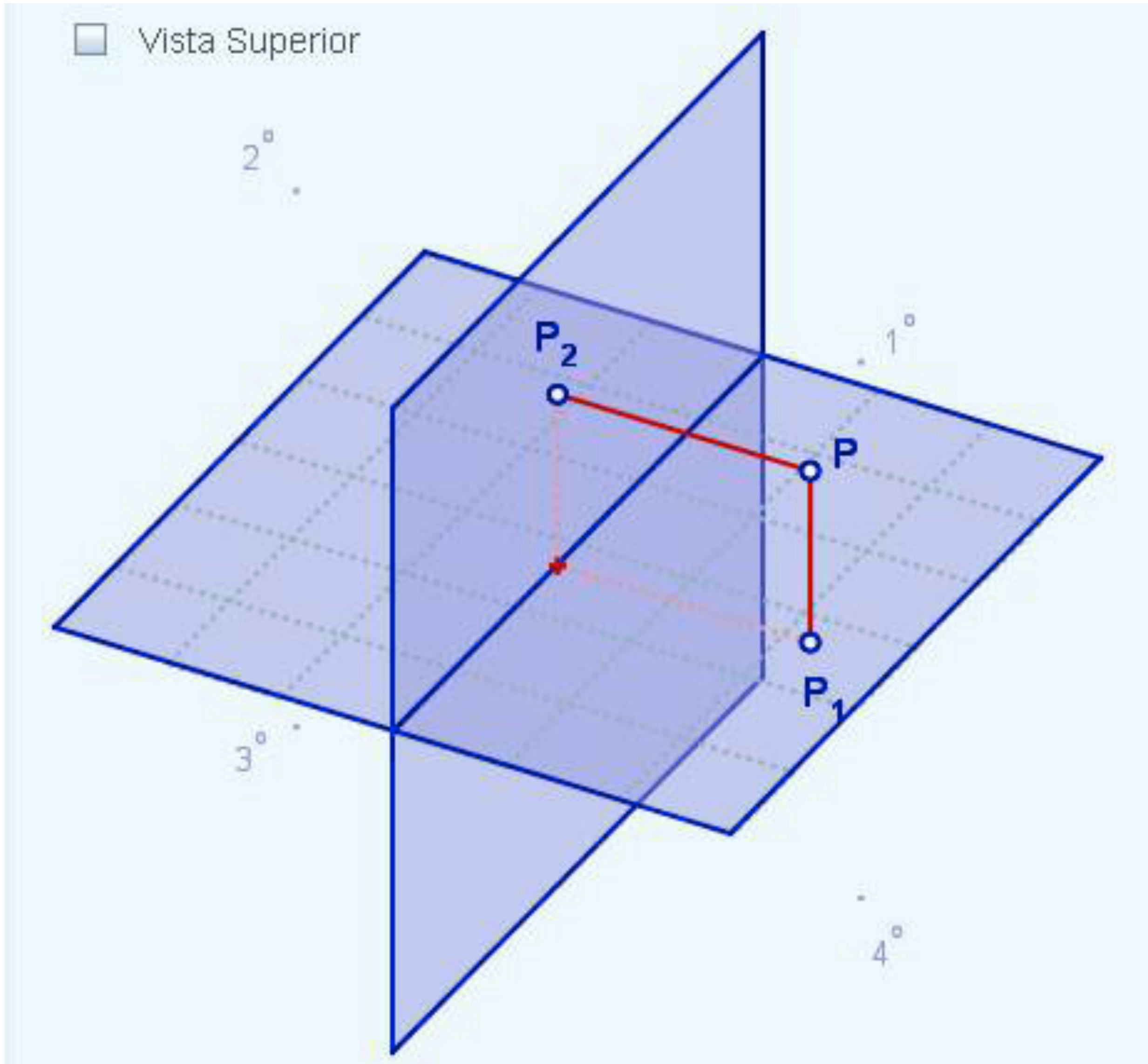




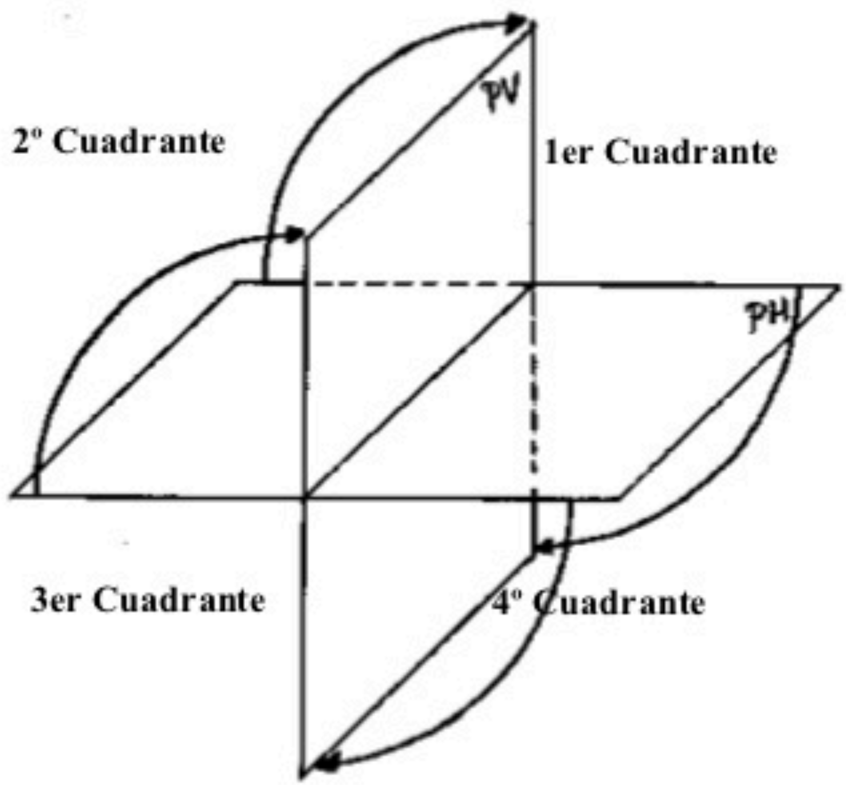

Δ
P
Δ
h
δ
δ
H_v
t

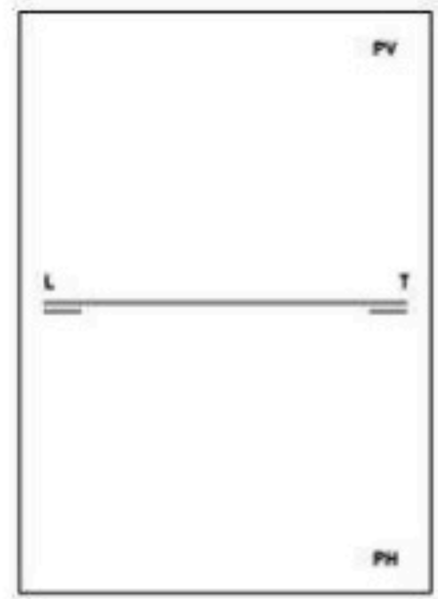

$\frac{Z'}{Z} = CR$
X
Y
Z
X'
Z'
Zo
O
Y'
PLANO DEL CUADRO

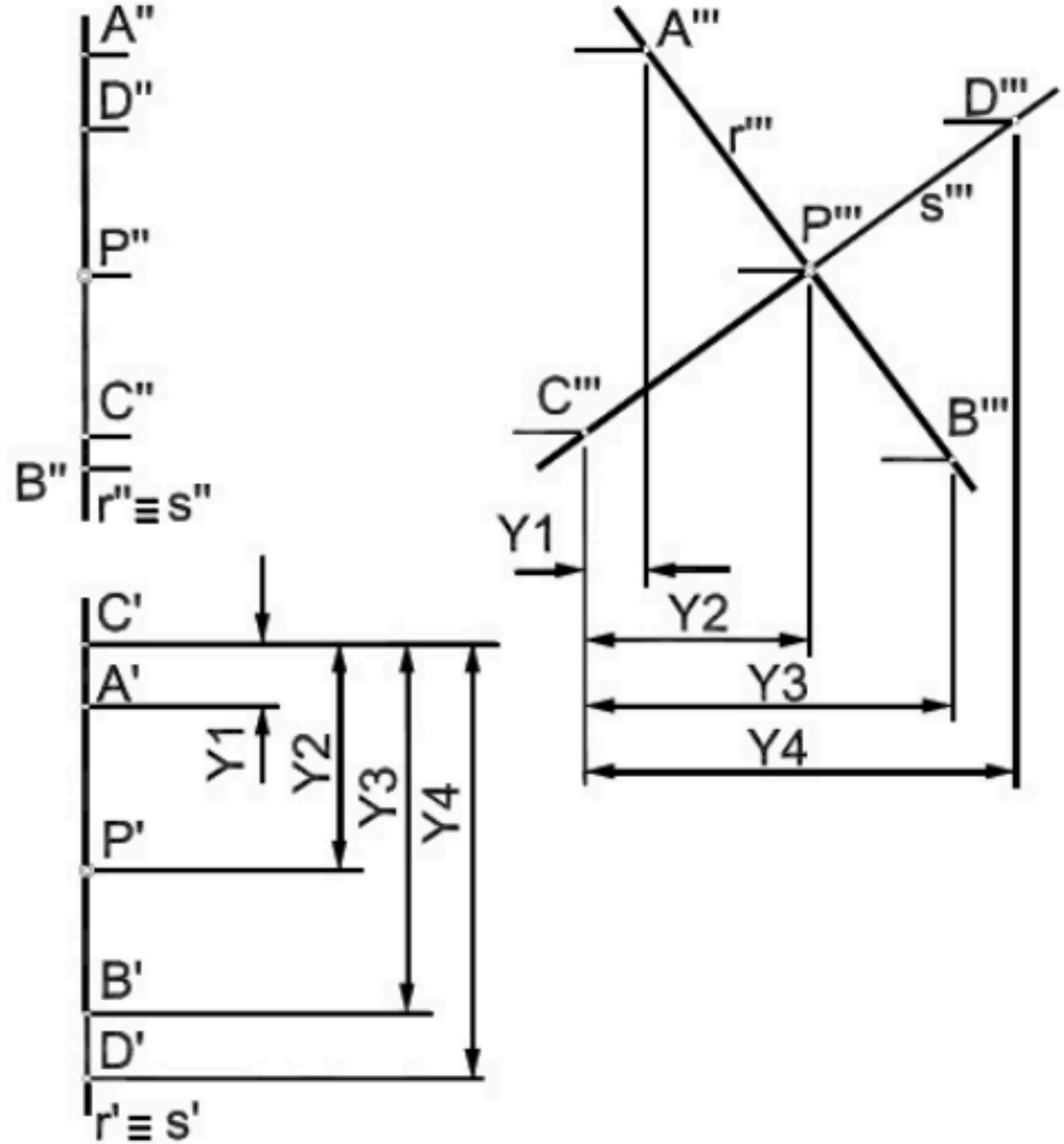

P_2
P_1



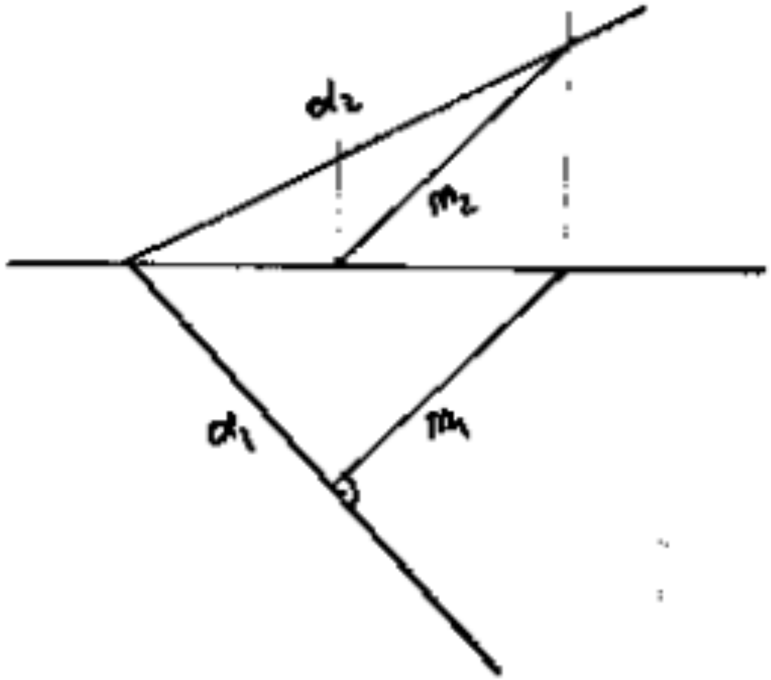
Vista Superior
2°
1°
3°
4°
P2
P
P1

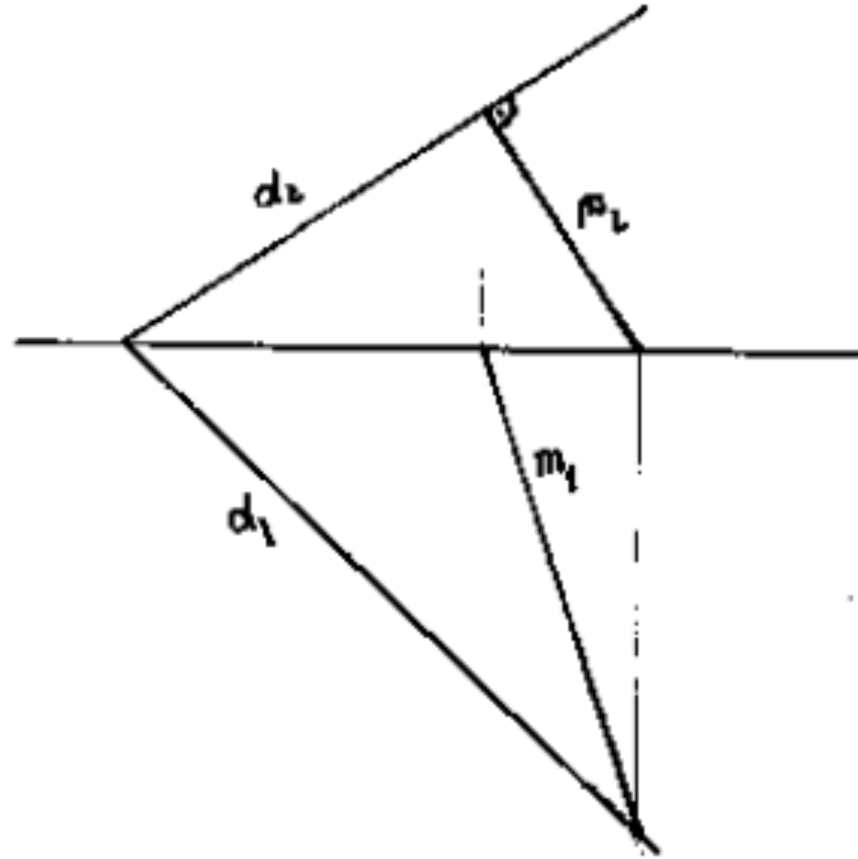

2º Cuadrante
PV
1er Cuadrante
PH
3er Cuadrante
4º Cuadrante

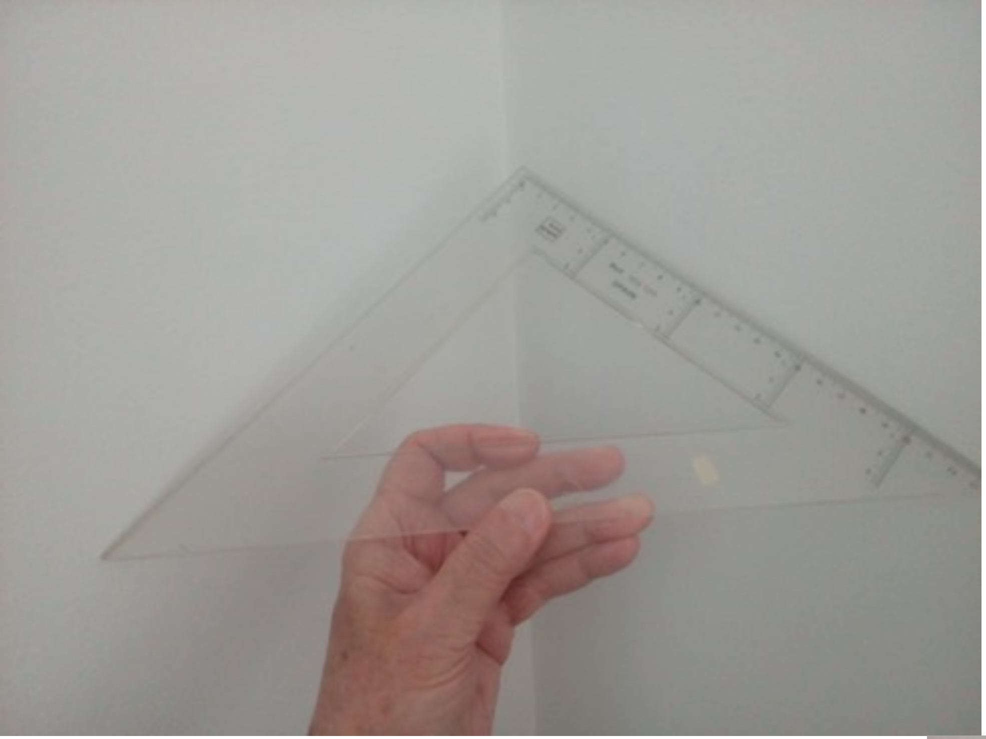

PV
L
T
PH



A''
D''
P''
C''
B''
r''≡s''
A'''
D'''
r'''
s'''
P'''
C'''
B'''
Y1
Y2
Y3
Y4
C'
A'
Y1
Y2
Y3
Y4
P'
B'
D'
r'≡s'


d2
m2
d1
m1


d2
m1
d1



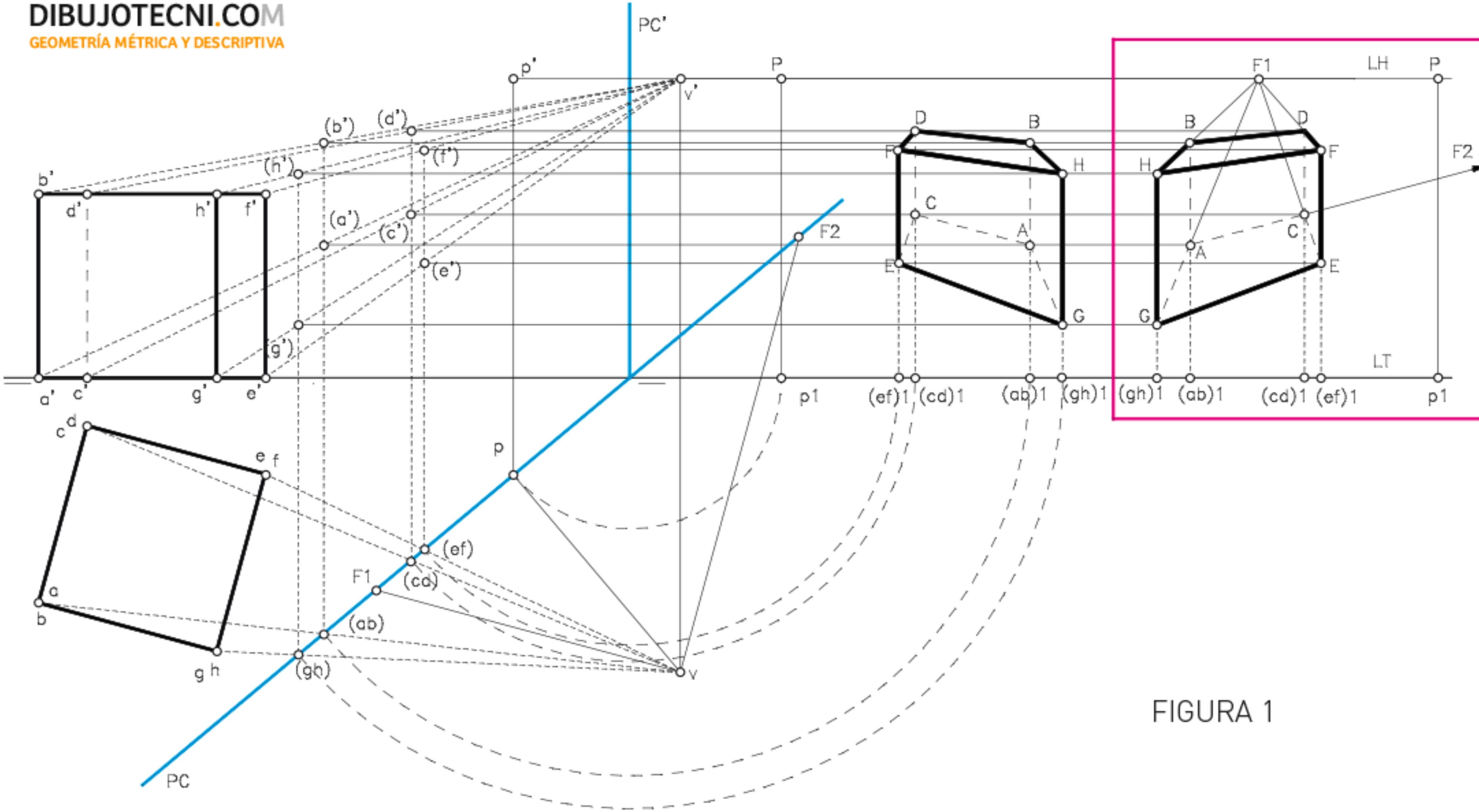
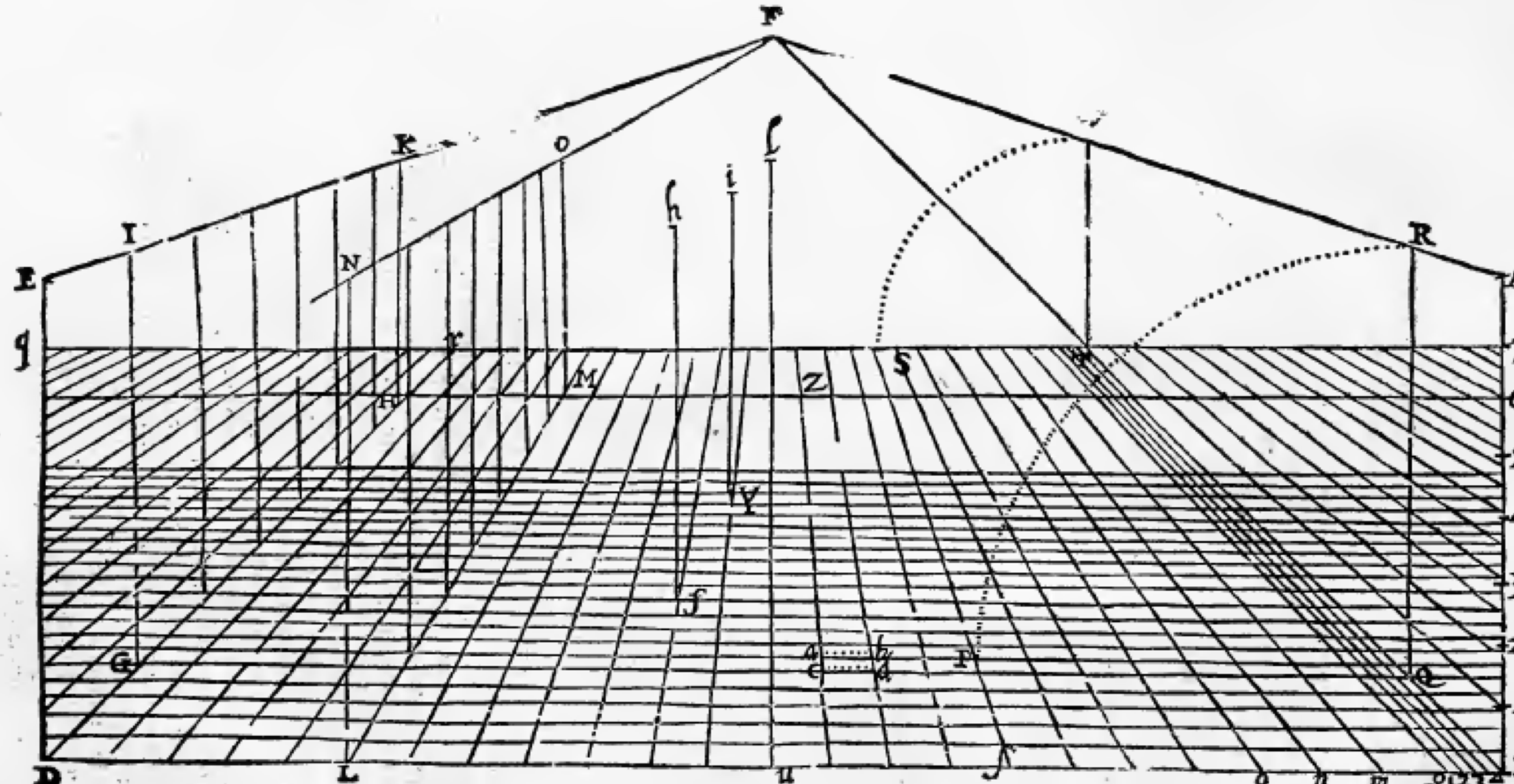
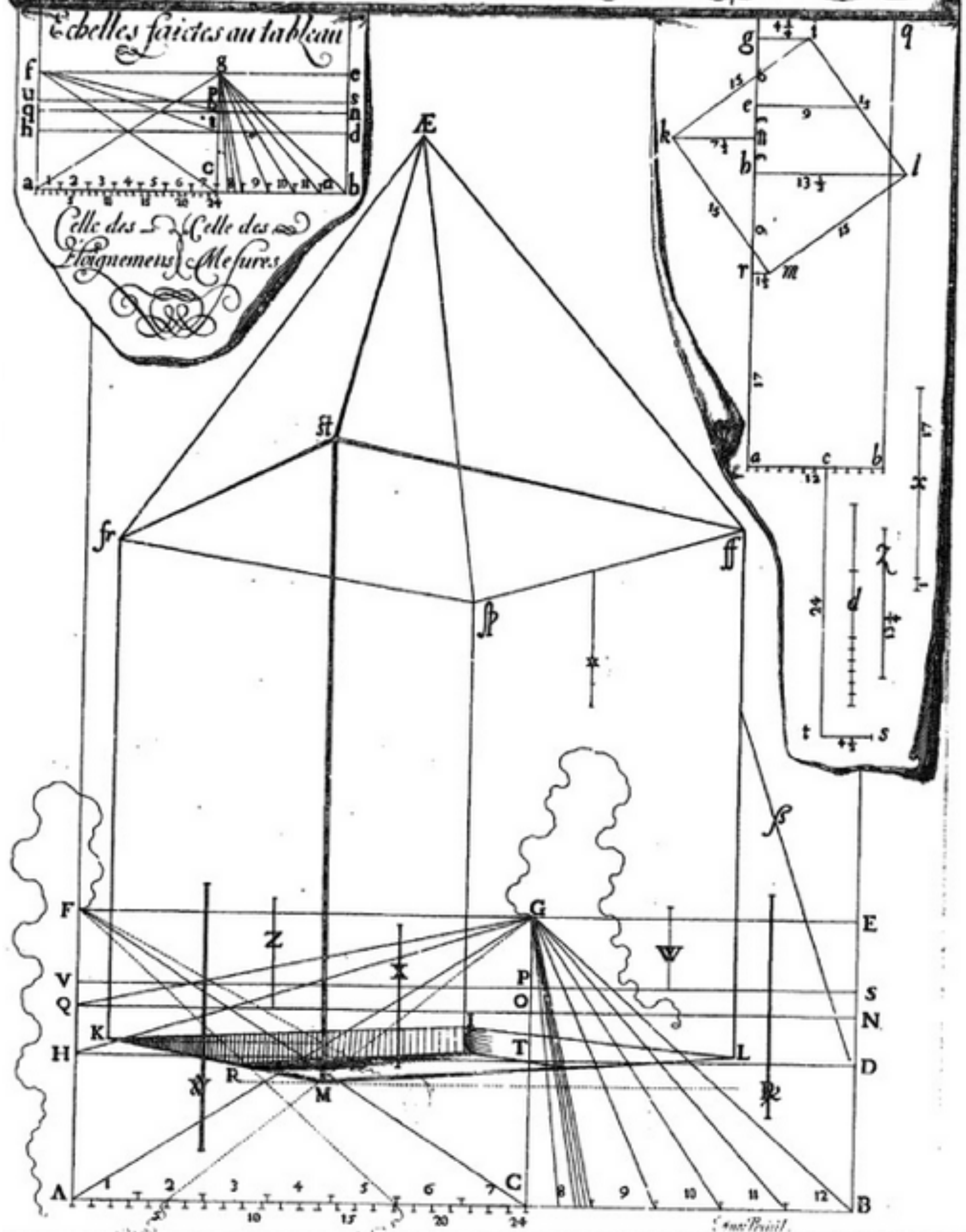


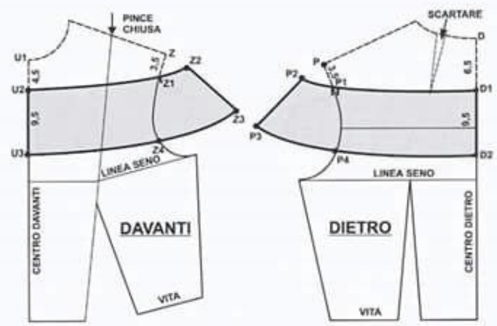
FIGURA 1

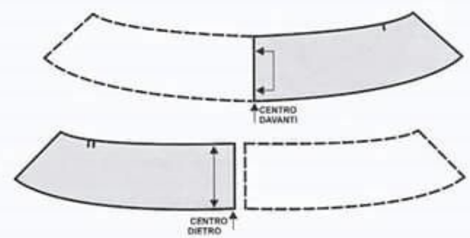

F
K
O
I
N
E
R
A8
q
7p
M
Z
S
6
5
4
Y
3
G
P
2
Q
1
D
L
u
B

Exemple de Lune des manieres vniuerselles du S.r G.D.L.
Touchant la pratique de la Perspectiue, Sans employer aucun tiers poinct de distance ou d'autre nature qui soit hors du champ de l'Ouurage.

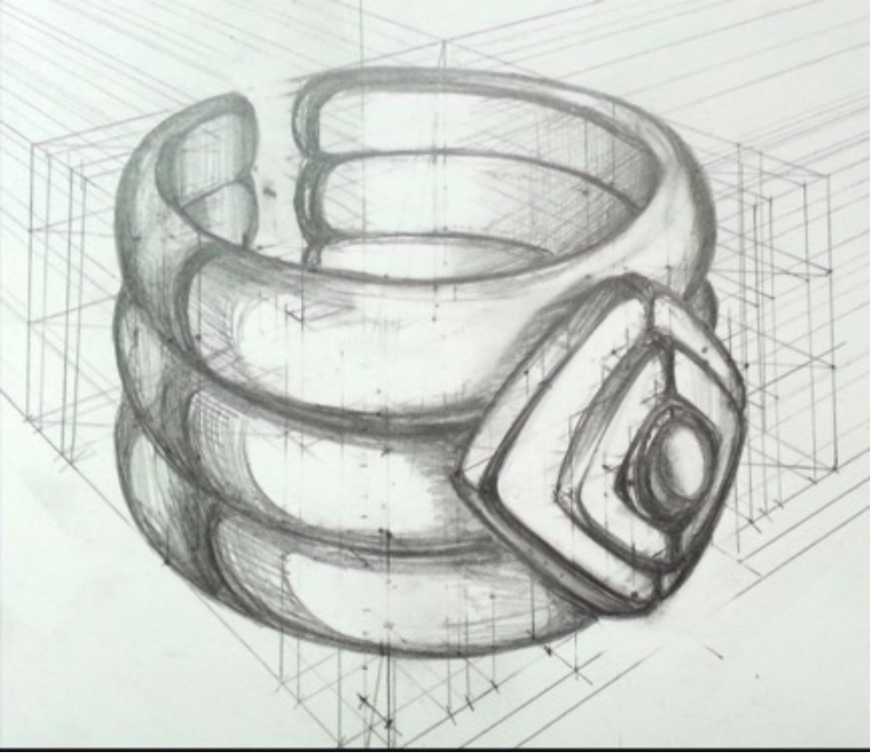


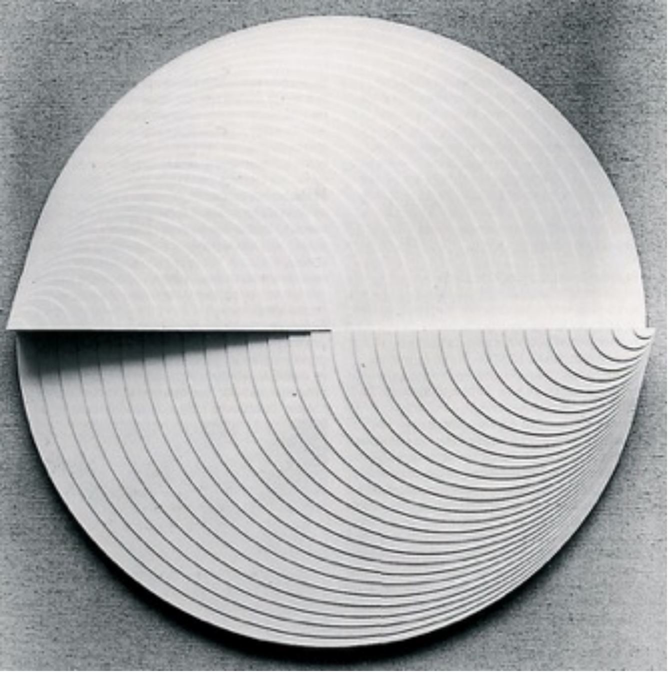
Collo a fascia manica a giro

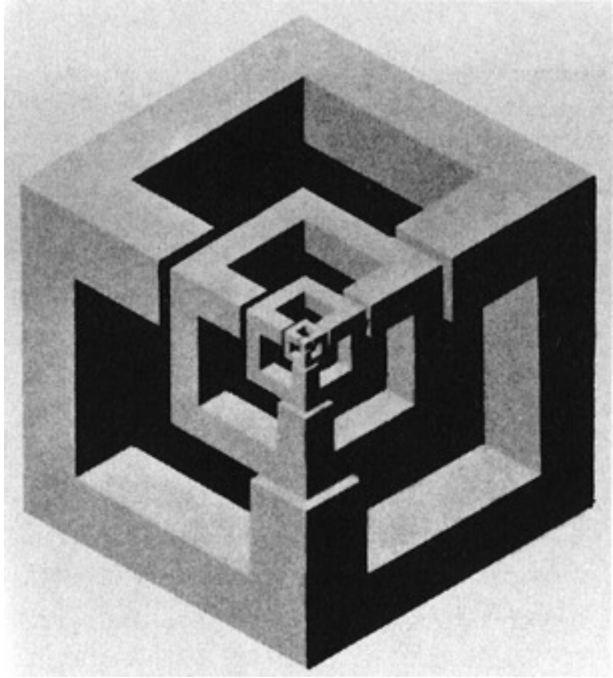


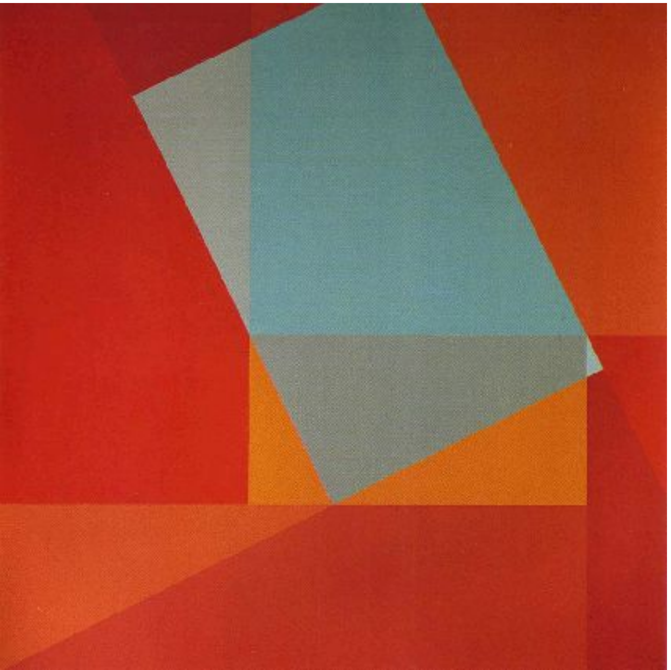


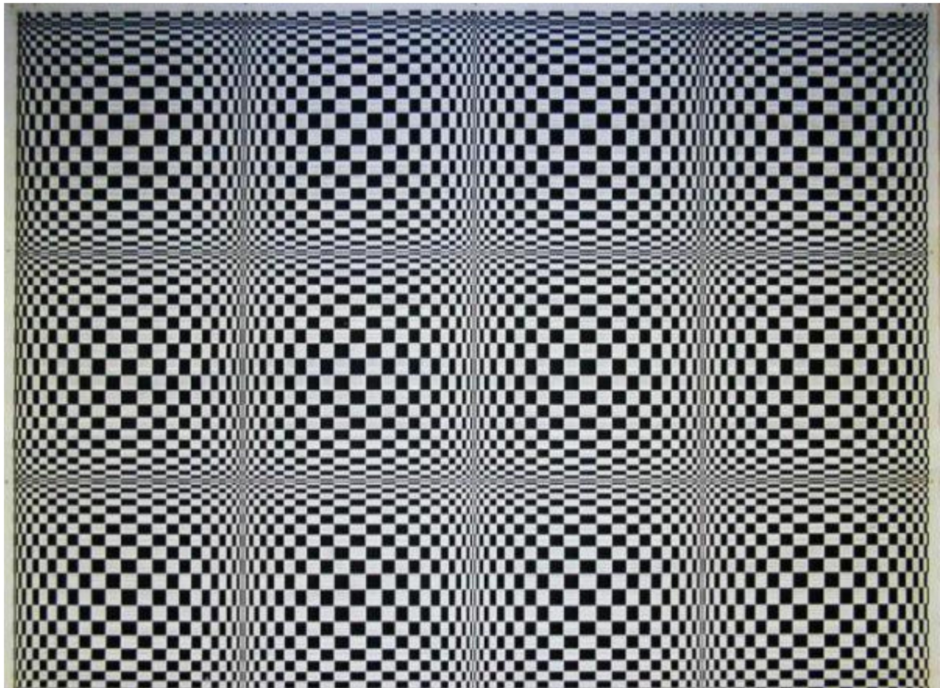
- Tracciare la base del corpino e chiudere la pince seno sfogandola in vita o in altra posizione in base al figurino.
- Tracciare la fascia con scollatura e altezza desiderate, come mostrato in figura.
- Riprendere le fasce davanti e dietro con un altro pezzo di carta per modelli.
- Modificare la tromba della manica in base all'abbassamento eseguito sul corpino.



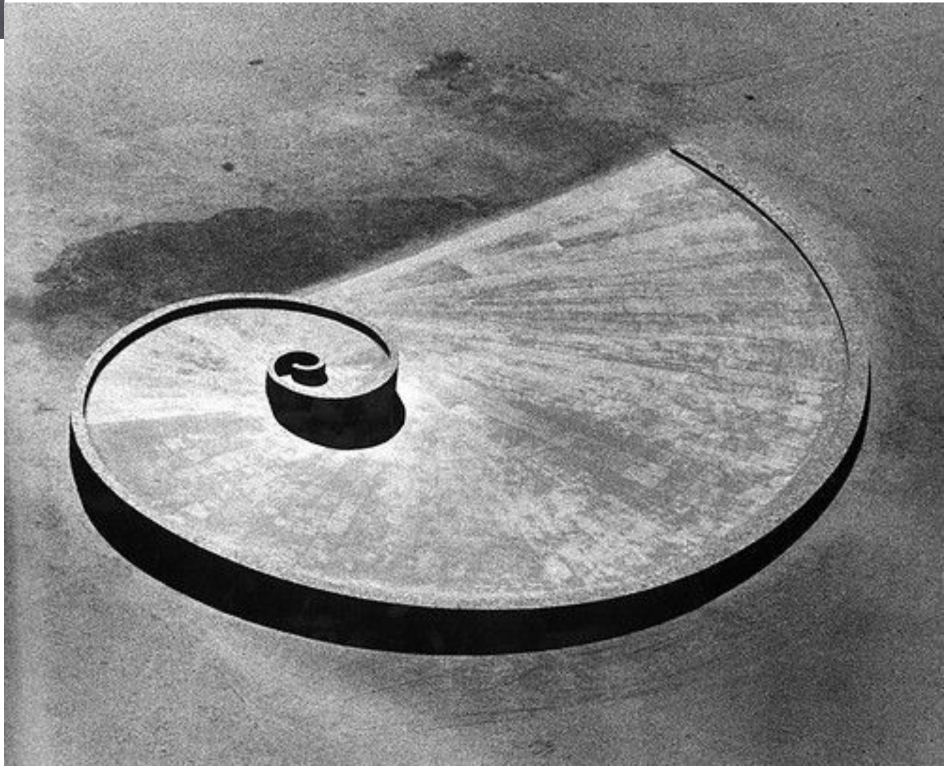


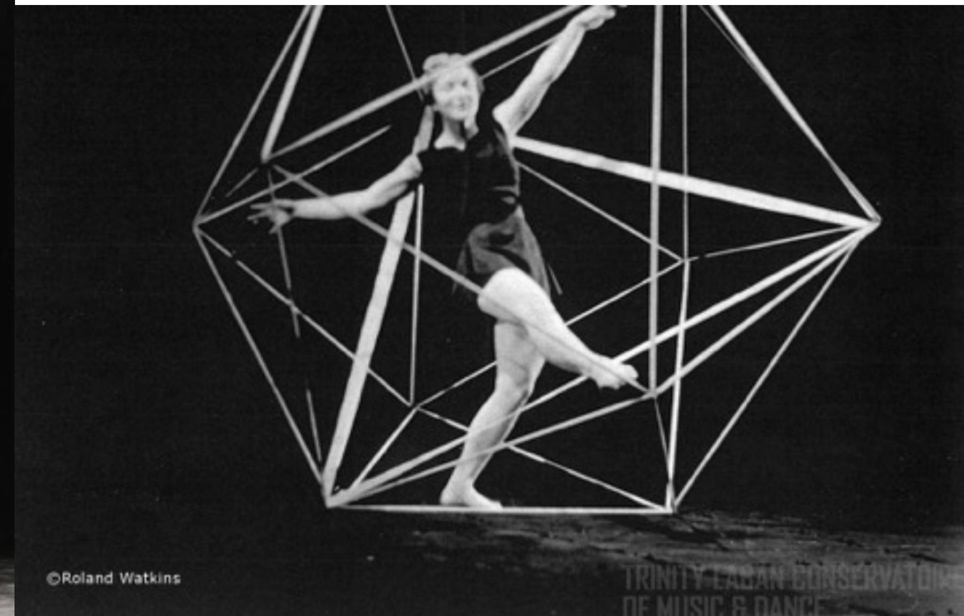







Madrid




©Roland Watkins